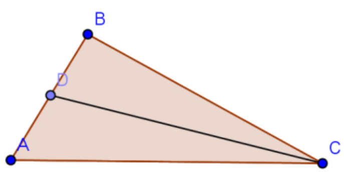
ძვირფასო მასწავლებლებო, შემოგთავაზებთ ზოგიერთი ამოცანებისა და სავარჯიშოების განხილვას, რომელიც ეფუძნება საბაზო და საშუალო საფეხურის მასწავლებლის პროფესიულ სტანდარტს **მათემატიკაში.**

ამჟამად შემოგთავაზებთ პლანიმეტრიის ამოცანების ამოხსნებს.

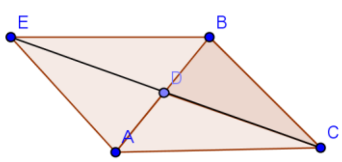
ამოცანა 1. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში, რომლის გვერდებია a,b,c, ხოლო m_c არის c გვერდისადმი გავლებული მედიანა, სამართლიანია შემდეგი ორმაგი უტოლობა $\frac{a+b-c}{2}<m_c<\frac{a+b}{2}$

ამოხსნა:



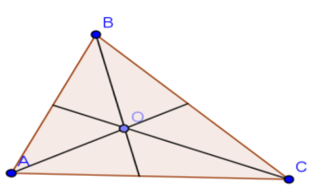
ვთქვათ, D არის AB გვერდის შუაწერტილი, მაშინ $CD+AD>CA$, $BD+CD>BC$, ამიტომ $2CD+BA>CA+BC$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{a+b-c}{2}<m_c$

ახლა ვაჩვენოთ $m_c<\frac{a+b}{2}$ უტოლობის სამართლიანობა.



ვთქვათ, E წერტილი C წერტილის სიმეტრიული წერტილია D წერტილის მიმართ, მაშინ $CD=DE$ და $BE=CA$, $2m_c=CE<CB+BD=CB+CA$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $m_c<\frac{a+b}{2}$.

ამოცანა 2. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში მედიანების ჯამი მეტია პერიმეტრის $\frac{3}{4}$-ზე და ნაკლებია პერიმეტრზე.



$\frac{3}{4}P<m_a+m_b+m_c<P$

ამოხსნა: ზემოთ დამტკიცებული ამოცანიდან ვიცით,რომ

$m_c < \frac{a+b}{2}$, $m_a < \frac{c+b}{2}$, $m_b < \frac{a+c}{2}$.

თუ შევკრებთ ამ უტოლობათა მარცხენა და მარჯვენა მხარეებს, მივიღებთ $m_a + m_b + m_c < P$.

ახლა ვაჩვენოთ $m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}P$ უტოლობა.

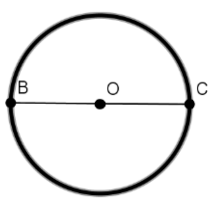
ვთქვათ, O წერტილი არის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, მაშინ $BO + OA > BA$, $CO + BO > BC$, $AO + OC > BA$. შევკრიბოთ ეს უტოლობები:

$$2BO + 2OA + 2OC > AB + BC + AC.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $BO = \frac{2}{3}m_b$, $AO = \frac{2}{3}m_a$, $CO = \frac{2}{3}m_c$ მივიღებთ

$\frac{4}{3}m_a + \frac{4}{3}m_b + \frac{4}{3}m_c > P \implies m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}P$

ამოცანა 3. ვთქვათ, მოცემულია ერთეულოვანი წრეწირი და სიბრტყის ნებისმიერი n წერტილი: $A_1, A_2, \dots, A_n$. ვაჩვენოთ, რომ წრეწირზე მოიძებნება ისეთი M წერტილი, რომ $MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_n \geq n$.

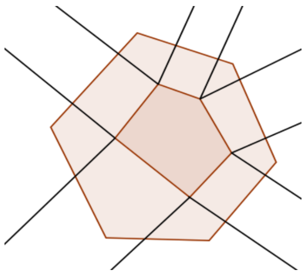


ამოხსნა: ვთქვათ, B და C წრეწირის დიამეტრალურად მოპირდაპირე წერტილებია, მაშინ $BA_k + CA_k \geq BC = 2$.

დავწეროთ ეს უტოლობა ნებისმიერი $k = 1,2, \dots n$ რიცხვისათვის, მივიღებთ:

$(BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_n) + (CA_1 + CA_2 + \cdots + CA_n) \geq 2n$, ამიტომ ამ ორი ჯამიდან ერთ-ერთი იქნება n-ზე მეტი. თუ $(BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_n) \geq n$, მაშინ საძიებელი M წერტილი იქნება B, ხოლო თუ $(CA_1 + CA_2 + \cdots + CA_n) \geq n$, მაშინ საძიებელი M წერტილი იქნება C.

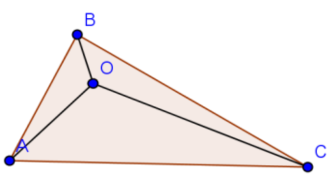
ამოცანა 4. ვთქვათ, ამოზნექილი მრავალკუთხედის შიგნით მდებარეობს მეორე მრავალკუთხედი. ვაჩვენოთ, რომ გარე მრავალკუთხედის პერიმეტრი მეტია შიგნით მდებარე მრავალკუთხედის პერიმეტრზე.



ამოხსნა: აღვნიშნოთ P_1-ით გარე მრავალკუთხედის პერიმეტრი, ხოლო P_2-ით შიგა მრავალკუთხედის პერიმეტრი. შიგნით მდებარე მრავალკუთხედის გვერდებზე ავაგოთ ნახევარზოლები ისე, რომ მათი პარალელური ნახევარწრფეები მართობული იყოს ამ მრავალკუთხედის გვერდების.

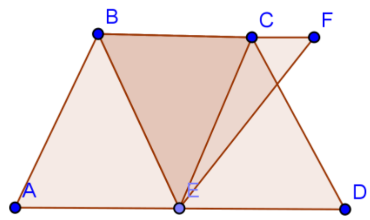
P-ით აღვნიშნოთ გარე მრავალკუთხედის პერიმეტრის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია ამ ნახევარზოლებში. მაშინ შიგა მრავალკუთხედის P_2 პერიმეტრი არ აღემატება P-ს ანუ $P_2 \leq P$, ამავე დროს $P < P_1 \Rightarrow P_2 < P_1$

ამოცანა 5. ABC სამკუთხედის შიგნით აღებულია O წერტილი. ვაჩვენოთ, რომ $\frac{p}{2} < AO + BO + CO < P$,სადაც P ΔABC-ს პერიმეტრია.



ამოხსნა: რადგან $AO + OB > AB, BO + OC > BC$ და $CO + OA > AC$, ამიტომ $AO + BO + CO > \frac{AB+BC+CA}{2}$. ΔABC სამკუთხედი მთლიანად შეიცავს ΔABO-ს,მაშინ $AB + BO + OA < AB + BC + CA$ (იხილე მე-4 ამოცანა). ე.ი. $BO + OA < BC + CA$. ანალოგიურად ABC მოიცავს ΔBOC და ΔAOC −საც, ამიტომ $AO + OC < AB + BC$ და $CO + OB < CA + AB$. შევკრიბოთ ეს უტოლობები და მივიღებთ $AO + BO + CO < AB + BC + CA$.

ამოცანა 6. ვთქვათ, $ABCD$ ტრაპეციის AD ფუძეზე მოიძებნება ისეთი E წერტილი, რომ ABE, BCE და CDE სამკუთხედების პერიმეტრები ტოლია. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში $BC = \frac{AD}{2}$.



ამოხსნა: დამტკიცებისთვის საკმარისია, რომ ვაჩვენოთ $ABCE$ და $BCDE$ პარალელოგრამებია. ΔABC შევავსოთ $ABEF$ პარალელოგრამამდე. მაშინ P_{BFE}=P_{ABE}, ამიტომ $P_{BFE} = P_{BCE}$ $\Rightarrow$ $F = C$. სხვა შემთხვევაში ერთ-ერთი BCE და BFE სამკუთხედებიდან აღმოჩნდებოდა მეორე მათგანის შიგნით და მათი პერიმეტრები ტოლი არ იქნებოდა. ამით ვაჩვენეთ, რომ $ABCE$ პარალელოგრამია. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $BCDE$ პარალელოგრამია, ამიტომ $AD = 2BC$.

ამოცანა 7. ვაჩვენოთ, რომ a, b და c რიცხვები არიან რომელიღაც სამკუთხედის გვერდები, მხოლოდ მაშინ, როცა $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$ სადაც x, y, z დადებითი რიცხვებია.

ამოხსნა: თუ ამოვხსნით $x + y = c$, $x + z = b$ და $y + z = a$ განტოლებებით შედგენილ სისტემებს, მივიღებთ $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$ a, b და c გვერდებისთვის სამკუთხედის უტოლობებს: ახლა თუ გავიხსენებთ, რომ $x > 0$, $y > 0$, და $z > 0$, მივიღებთ a, b და c გვერდებისთვის სამკუთხედის უტოლობებს: $b + c - a > 0 \Rightarrow b + c > a$, $a + c - b > 0 \Rightarrow a + c > b$ და $a + b - c > 0 \Rightarrow a + b > c$.

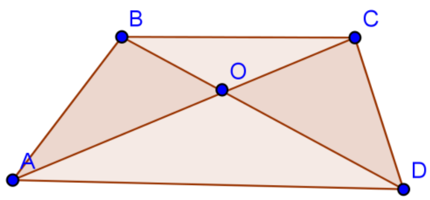
ამოცანა 8. ვთქვათ a, b და c ნებისმიერი სამკუთხედის გვერდებია. დავამტკიცოთ, რომ $a^2 + b^2 + c^2 > 2(ab + bc + ca)$.

ამოხსნა: სამკუთხედის უტოლობის თანახმად

$a^2 > (b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$, $b^2 > a^2 - 2ac + c^2$ და $c^2 > a^2 - 2ab + b^2$. ამ უტოლობის შეკრებით მივიღებთ

$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

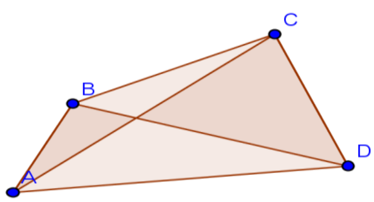
ამოცანა 9. ვთქვათ, $ABCD-$ ამოზნექილი ოთხკუთხედია. ვაჩვენოთ, რომ $AB + CD < AC + BD$.



ამოხსნა: ვთქვათ, O წერტილი $ABCD$ ოთხკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია, მაშინ $AC + BD = (AO + OC) + (BO + OD) = (AO + OB) + (CO + OD) > AB + CD$.

მოცანა 10. ამოზნექილი ოთხკუთხედი მდებარეობს მეორე ამოზნექილი ოთხკუთხედის შიგნით. შეიძლება თუ არა გარე ოთხკუთხედის დიაგონალების სიგრძეების ჯამი 2-ჯერ ნაკლები იყოს შიგა ოთხკუთხედის დიაგონალების ჯამზე? 1.99-ჯერ ნაკლები?

ამოხსნა: თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ თუ $ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედის პერიმეტრი არის P, ხოლო დიაგონალების სიგრძეები d_1 და d_2, მაშინ
$\frac{P}{2} < d_1 + d_2 < P$.



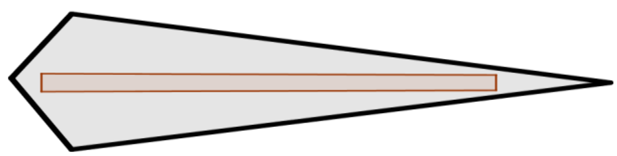
ცხადია, რომ $AC < AB + BC$ და $AC < AD + CD$, ამიტომ $2AC < AB + BC + AD + CD$ აქედან კი $AC < \frac{P}{2}$. ანალოგიურად, $BD < P/2$. ბოლო ორი უტოლობის შეკრებით მივიღებთ $AC + BD < P$, მეორეს მხრივ, $AB + CD < AC + BD$ და $BC + AD < AC + BD$ (იხილე ამოცანა 9). უტოლობებიდან გამომდინარეობს $P < 2(AC + BD)$ ანუ დამტკიცდა, რომ $\frac{P}{2} < d_1 + d_2 < P$.

ახლა ვთქვათ, P გარე ოთხკუთხედის პერიმეტრია, P'-შიგა ოთხკუთხედის, d-გარე ოთხკუთხედის დიაგონალების ჯამი, ხოლო d'- შიგა ოთხკუთხედის. ზემოთ

დამტკიცებულის თანახმად $d > \frac{P}{2}$, მაგრამ რადგან $P' < P$ (იხილე ამოცანა 4), ამიტომ $d' < P' < P < 2d$, აქედან $d' < 2d$.

ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ გარე ოთხკუთხედის დიაგონალების ჯამი არ შეიძლება იყოს შიგა ოთხკუთხედის დიაგონალების ჯამზე ორჯერ ნაკლები ($d \neq \frac{d'}{2}$), მაგრამ 1,99 –ჯერ ნაკლები თურმე შეიძლება.

ავაგოთ ასეთი ოთხკუთხედები. ავიღოთ მონაკვეთები, რომლის სიგრძე 1 ერთეულია. ამ მონაკვეთის ერთ ბოლოში მოვათავსოთ ერთ-ერთი წვერო, ხოლო დანარჩენი სამი მეორე ბოლოს, რაც შეიძლება ახლოს. ასეთი ოთხკუთხედის დაიგონალების სიგრძეთა ჯამი უახლოვდება 1-ს.



მიღებული ოთხკუთხედის შიგნით ჩავსვათ ოთხკუთხედი, რომლის ორი წვერო მონაკვეთის ერთ ბოლოსთანაა, ხოლო დანარჩენი ორი – მეორე ბოლოსთან. ასეთი ოთხკუთხედის დიაგონალების ჯამი უახლოვდება 2-ს.

მაია თევდორაშვილი

აკადემიკოს ილია ვეკუას სახელობის ფიზიკა-მათემატიკური № 42 საჯარო სკოლის მათემატიკის მასწავლებელი