<u>კომპლექსური რიცხვები</u>

კომპლექსური რიცხვები წარმოადგენს ნამდვილი რიცხვების განზოგადოებას. კომპლექსურ რიცხვებს და კომპლექსური ცვლადის ფუნქციებს მნიშვნელოვანი როლი ენიჭებათ ფიზიკასა და მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

§ 1. კომპლექსური რიცხვების განმარტება

განვიხილოთ სიმრავლე, რომლის ელემენტებსაც წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილები და აღვნიშნოთ ასე (a,b). (a,b) და (b,a) ელემენტები განსხვავებულია, თუ $a \neq b$. მაგალითად, ჩვენი სიმრავლის ელემენტები იქნება (0.0), $(1,0)$, $(-1,12)$. (a_1,b_1) და (a_2,b_2) ითვლება ტოლად, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$a_1 = a_2 \quad \text{და} \quad b_1 = b_2.$$

ახლა შემოვიტანოთ ნამდვილ რიცხვთა წყვილების სიმრავლეში ალგებრული ოპერაციები: შეკრება და გამრავლება.

(a_1,b_1) და (a_2,b_2) ელემენტების ჯამი ვუწოდოთ $(a_1+a_2;b_1+b_2)$ ელემენტს.

(a_1,b_1) და (a_2,b_2) ელემენტების ნამრავლი კი წყვილს $(a_1a_2-b_1b_2;a_1b_2+b_1a_2)$.

ამრიგად, ჩვენს მიერ შემოტანილი ოპერაციები განისაზღვრება შემდეგი ტოლობებით:

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2;b_1+b_2) \qquad (1)$$

$$(a_1,b_1).(a_2,b_2) = (a_1a_2-b_1b_2;a_1b_2+b_1a_2) \qquad (2)$$

კომპლექსური რიცხვები ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილებს, რომელთათვისაც შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები განსაზღვრულია (1) და (2) ფორმულებით.

კომპლექსურ რიცხვებს ხშირად აღნიშნავენ ერთი ასოთი z ან ω-თი.

§ 2. შეკრების და გამრავლების ოპერაციათა თვისებები

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_2$
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. $\forall z_1, z_2$ რიცხვებისთვის $\exists\, z$ რიცხვი ისეთი, რომ $z_1 + z = z_2$, ამ რიცხვს ეწოდება z_2 და z_1 რიცხვების სხვაობა.
4. $z_1 z_2 = z_2 z_1$
5. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
6. $\forall z_1, z_2$ რიცხვებისთვის $\exists\, z$ რიცხვი ისეთი, რომ $z_1 z = z_2$, ამ რიცხვს ეწოდება z_2 და z_1 რიცხვების განაყოფი და აღინიშნება ასე z_2 / z_1.

(0.0) კომპლექსურ რიცხვზე გაყოფა არ შეიძლება.

7. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი თვისება მტკიცდება წინა პარაგრაფში მოცემული (1) და (2) ფორმულებით.

$$z = z_2 - z_1 = (a_2 - a_1; b_2 - b_1) \qquad (4)$$

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{(a_2; b_2)}{(a_1; b_1)} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2}; \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2} \right). \qquad (5)$$

ეს ფორმულები გვაძლევს კომპლექსური რიცხვების გამოკლებისა და გაყოფის წესებს.

შეკრებისა და გამრავლების შემოღებული ოპერაციები საშუალებას გვაძლევს, კომპლექსური რიცხვები განვიხილოთ როგორც განზოგადოება ნამდვილი რიცხვებისა, ხოლო ნამდვილი რიცხვები - როგორც კომპლექსური რიცხვების კერძო შემთხვევა. მართლაც, განვიხილოთ არა ყველა კომპლექსური რიცხვი, არამედ მხოლოდ $(a,0)$ სახის. შეკრების, გამრავლების, გამოკლების და გაყოფის $(a \neq 0)$ ფორმულებიდან ნათლად ჩანს, რომ ამ ტიპის რიცხვებზე მოქმედებების შედეგად მიიღება ამავე ტიპის რიცხვი. გარდა ამისა, $(a,0)$ სახის რიცხვებზე მოქმედების წესები მთლიანად ემთხვევა ნამდვილ რიცხვათა რიცხვებზე შესაბამის მოქმედებათა წესებს. ამასთან დაკავშირებით $(a,0)$ კომპლექსურ რიცხვს აიგივებენ a ნამდვილ რიცხვთან: $(a,0) = a$. მაგალითად, $(2;0) = 2$.

ამის მერე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე შეიძლება განვიხილოთ როგორც კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლე.

$(0;b)$ სახის კომპლექსურ რიცხვებს ეწოდება წარმოსახვითი. $(0;1)$ წყვილს ეწოდება წარმოსახვითი ერთეული და i ასოთი აღინიშნება. გამრავლების ფორმულის გამოყენებით ადვილი შესამოწმებელია რომ $(0;b)=(b;0)(0;1)=bi$, $(0;2)=2i$ და $(0;-1)=-i$.

§ 3. კომპლექსური რიცხვების ჩაწერის ალგებრული ფორმა

ნებისმიერი $z=(a;b)$ სახის კომპლექსური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: $z=(a;b)=(a;0)+(0;b)=(a;0)+(b;0)(0;1)$. მივიღებთ $z=(a;b)=a+bi$ ამ ჩანაწერს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ჩაწერის ალგებრული ფორმა.

a ნამდვილ რიცხვს ეწოდება $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი, ხოლო b ნამდვილ რიცხვს – წარმოსახვითი ნაწილი.

ზემოთ გამოთქმული მოსაზრებებიდან გამომდინარეობს კომპლექსურ რიცხვებზე მოქმედებათა შემდეგი წესები:

1. ორი კომპლექსური რიცხვი $z=a+bi$ და $w=c+di$ ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a=c$ და $b=d$ ანუ, როცა ტოლია ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები.

შევნიშნოთ, რომ მეტობისა და ნაკლებობის ცნებები კომპლექსური რიცხვებისთვის არ განისაზღვრება.

2. ახალი აღნიშვნებით შეკრების ფორმულა ჩაიწერება ასე:

$$(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i \qquad (1)$$

3. ალგებრული ფორმით მოცემული კომპლექსური რიცხვების ნამრავლი მოიცემა შემდეგი სახით:

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+cb)i \qquad (2)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $a=c=0$ და $b=d=1$, მივიღებთ მნიშვნელოვან ტოლობას $ii=-1$, ანუ i^2=-1. (3)

კომპლექსურ რიცხვებს $a+bi$ და $a-bi$, ანუ რიცხვებს, რომლებიც მხოლოდ წარმოსახვითი ნაწილის ნიშნით განსხვავდებიან ეწოდებათ შეუღლებული რიცხვები. შეუღლებული რიცხვების ჯამი და ნამრავლი ნამდვილი რიცხვებია.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა: დავუშვათ, $a=\alpha, b=0$, მაშინ მივიღებთ ნამდვილი რიცხვის კომპლექსურ რიცხვზე გამრავლების წესს: $\alpha(c+di)=\alpha c+\alpha di$

ალგებრული ფორმით ჩაწერილი კომპლექსური რიცხვების გამოკლებისა და გაყოფის ოპერაციები გამოისახება შემდეგი ფორმულებით:

$$(c+di)-(a+bi)=c-a+(d-b)i$$

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-cb}{a^2+b^2}i \qquad (4) \text{ და } (5)$$

ბოლო ფორმულაში თუ $a=0, b=\alpha$, მივიღებთ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ რიცხვზე გაყოფის წესს:

$$\frac{c+di}{\alpha}=\frac{c}{\alpha}+\frac{d}{\alpha}i$$

გაყოფისას ფორმულა (5)-ის ნაცვლად უმჯობესია ვისარგებლოთ შემდეგი წესით: მრიცხველიც და მნიშვნელიც გავამრავლოთ მნიშვნელის შეუღლებულზე.

§ 4. კომპლექსური რიცხვების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი

ცნობილია, რომ ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილთა და სიბრტყის წერტილთა შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება. ამისათვის საკმარისია სიბრტყეზე შევარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა და ყოველ დალაგებულ (a,b) წყვილს შევუსაბამოთ $\mathrm{M}(a,b)$ წერტილი. კომპლექსური რიცხვები ჩვენ განვმარტეთ როგორც ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილი, რომელთათვისაც განსაზღვრულია შეკრებისა და გამოკლების ოპერაციები.

ეს საშუალებას გვაძლევს კომპლექსური რიცხვები განვიხილოთ როგორც საკოორდინატო სიბრტყის წერტილები. ამ სიბრტყეს კომპლექსურ სიბრტყეს უწოდებენ. აბსცისათა ღერძს უწოდებენ ნამდვილ ღერძს, ხოლო ორდინატთა ღერძს -- წარმოსახვითი ღერძი.

ხშირად მოსახერხებელია კომპლექსური რიცხვი $(a,b)=a+bi$ განვიხილოთ როგორც $\overrightarrow{OM}$ ვექტორი. ცხადია, რომ სიბრტყის ყოველ ვექტორს სათავით $O(0,0)$ და $M(a,b)$ ბოლოთი შეესაბამება $(a,b)=a+bi$ კომპლექსური რიცხვი და პირიქით. $O(0,0)$ წერტილს შეესაბამება ნულოვანი ვექტორი.

კომპლექსური რიცხვის ვექტორად წარმოდგენა საშუალებას გვაძლევს გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მივცეთ მათზე მოქმედებებს.

კომპლექსური რიცხვების ჯამი გეომეტრიულად შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ვექტორი, რომელიც იმ ვექტორთა ჯამის ტოლია, რომლებიც შესაკრები კომპლექსური რიცხვების შესაბამისია.

განსაზღვრება. $(a,b)=a+bi$ **რიცხვის მოდული ეწოდება ამ რიცხვის შესაბამისი ვექტორის სიგრძეს.**

z რიცხვის მოდული აღინიშნება $|z|$-ით. პითაგორას თეორემით ადვილად მიიღება, რომ $z=a+bi$ რიცხვისთვის $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. (1)

შეუღლებულ კომპლექსურ რიცხვებს აქვთ ტოლი მოდული.

ცხადია, რომ კომპლექსური რიცხვები, რომლებსაც ერთნაირი მოდული აქვთ, მდებარეობენ წრეწირზე, რომლის რადიუსი ამ მოდულის ტოლია, ხოლო ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია.

გეომეტრიულად კომპლექსური რიცხვი ჩაითვლება მოცემულად, თუ მოცემულია მისი მოდული და მიმართულება, მაგალითად კუთხე OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

განსაზღვრება. $z \neq 0$ **კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი ეწოდება კუთხეს** z **ვექტორსა და ნამდვილი ღერძის დადებით მიმართულებას შორის და აღინიშნება** $\arg z$**-ით ან** $\arg(a+bi)$**-ით.**

მოდულისა და არგუმენტის მოცემით კომპლექსური რიცხვი ცალსახად განისაზღვრება. $z=0$-ის შემთხვევაში არგუმენტი არ განისაზღვრება, მაგრამ მხოლოდ ამ დროს მოიცემა რიცხვი მხოლოდ თავისი მოდულით.

განსხვავებით მოდულისა, კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი ცალსახად არ განისაზღვრება. მაგალით დ, $z=1+i$ რიცხვის არგუმენტებია შემდეგი კუთხეები: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{9}{4}\pi$, $-\frac{7\pi}{4}$ დაზოგადად ნებისმიერი $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

კომპლექსური რიცხვის ნებისმიერი ორი არგუმენტის სხვაობა არის 2π-ის ჯერადი.

$z = a+bi$ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები გამოისახება მოდულით და არგუმენტით:

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi \ . \qquad (2)$$

ამრიგად, კომპლექსური რიცხვის φ არგუმენტი შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულებით:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \ , \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \ . \qquad (3)$$

ამ ფორმულებიდან კარგად ჩანს, რომ ყოველი არგუმენტი აკმაყოფილებს

შემდეგ განტოლებას: $tg\varphi = \frac{b}{a}$.

ეს განტოლება არ არის (3)-ის ტოლფასი, მას გააჩნია უფრო მეტი ამონახსნი, მაგრამ საჭირო ამონახსნების ამორჩევა სირთულეს არ წარმოადგენს, რადგან კომპლექსური რიცხვის ალგებრული ფორმით ჩაწერისას კარგად ჩანს, თუ რომელ მეოთხედში მდებარეობს ეს რიცხვი.

§ 5. კომპლექსური რიცხვის ჩაწერის ტრიგონომერტიული ფორმა. ტრიგონომეტრიული ფორმით ჩაწერილი კომპლექსური რიცხვების გამრავლება და გაყოფა.

როგორც ზემოთ ვნახეთ: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

ეს ფორმულები აკავშირებს კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს მის მოდულთან და არგუმენტთან.

ყოველი $z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვი ($z \neq 0$) შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (1)$$

სადაც r არის ამ რიცხვის მოდული, ხოლო φ–მისი ერთ-ერთი არგუმენტი. (1) ფორმულას ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ჩაწერის ტრიგონომეტრიული ფორმა.

იმისათვის რომ ალგებრული ფორმიდან გადავიდეთ რიცხვის ჩაწერის ტრიგონომეტრიულ ფორმაზე, საკმარისია ვიპოვოთ ამ კომპლექსური რიცხვის მოდული და ერთ-ერთი არგუმენტი.

კომპლექსური რიცხვის ჩაწერის ტრიგონომეტრიული ფორმა ძალიან მოსახერხებელია გამრავლებისა და გაყოფის დროს.

შევნიშნოთ, რომ ორი კომპლექსური რიცხვი $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ და $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $r_1 = r_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in Z$, ე. ი. როცა ამ რიცხვების მოდულები ტოლია, ხოლო არგუმენტები განსხვავებულია $2\pi k$ -თი.

ჩავწეროთ ეხლა ტრიგონომეტრიული ფორმით ნამრავლი:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2) \qquad \text{ან}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

ამრიგად, $|z_1 z_2| = r_1 r_2$, $\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

ე. ი. სამართლიანია შემდეგი წინადადება:

ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლის მოდული ტოლია ამ რიცხვების მოდულების ნამრავლის, ხოლო არგუმენტი– შესაკრებთა არგუმენტების ჯამის.

განვიხილოთ რიცხვების გაყოფა.

ჩავწეროთ $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ და $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ რიცხვების განაყოფი ტრიგონომეტრიული ფორმით.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

ამრიგად, ორი კომპლექსური რიცხვის შეფარდების მოდული ამ რიცხვების მოდულების განაყოფის ტოლია, ხოლო არგუმენტი – გასაყოფისა და გამყოფის არგუმენტთა სხვაობის.

§ 6. ხარისხში აყვანა და ფესვის ამოღება

ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლის ფორმულა შეიძლება განვაზოგადოთ n თანამამრავლის შემთხვევაშიც. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით, ადვილად მიიღება შემდეგი შედეგი:

n კომპლექსური რიცხვის ნამრავლის მოდული ტოლია თანამამრავლთა მოდულების ნამრავლის, ხოლო თანამამრავლთა არგუმენტთა ჯამი წარმოადგენს ნამრავლის არგუმენტს.

აქედან, როგორც კერძო შემთხვევა მიიღება ფორმულა:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

ეს ფორმულა გვაძლევს კომპლექსური რიცხვის მთელ ხარისხში აყვანის წესს:

კომპლექსური რიცხვის ნატურალურმაჩვენებლიან ხარისხში აყვანისას მისი მოდული ადის იმავე მაჩვენებლიან ხარისხში, ხოლო არგუმენტი მრავლდება ხარისხის მაჩვენებელზე.

გადავიდეთ კომპლექსური რიცხვიდან მოცემული ხარისხის ფესვის ამოღებაზე.

n-ური ხარისხის ფესვი ω რიცხვიდან ეწოდება ისეთ z რიცხვს, რომლის n-ური ხარისხი ω-ს ტოლია. $z = \sqrt[n]{\omega}, z^n = \omega$.

მაგალითად, კვადრატული ფესვი -1-დან არის რიცხვები i და $-i$, რადგან მათი კვადრატები -1-ის ტოლია.

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $z^n = \omega$ განტოლების ყოველი ამონახსნი წარმოადგენს n-ური ხარისხის ფესვს ω რიცხვიდან. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, იმისათვის, რომ ამოვიღოთ n-ური ხარისხის ფესვი ω რიცხვიდან, საკმარისია ამოვხსნათ $z^n = \omega$ განტოლება.

როცა ω=0, მაშინ $z^n = \omega$ განტოლებას ერთადერთი $z = 0$ ამონახსენი აქვს. როცა $\omega \neq 0$, მაშინ $z \neq 0$.

ამრიგად, z და ω შეიძლება წარმოვადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \omega = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

$z^n = \omega$ განტოლება მიიღებს სახეს

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

ორი კომპლექსური რიცხვი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ტოლი აქვთ მოდულები, ხოლო არგუმენტები განსხვავდება $2\pi k-$ თი, სადაც k რომელიღაცა მთელი რიცხვია. შესაბამისად,

$$r^n = \rho, n\varphi = \alpha + 2\pi k. \qquad \text{ანუ}$$

$$r = \sqrt[n]{\rho} \qquad \text{და} \quad \varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k, k \in Z.$$

ამრიგად, $z^n = \omega$ განტოლების ყველა ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k) + i\sin(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n})), \qquad k \in Z.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ, როცა $k = 0,1,2,...,n-1$ ყველა z_k განსხვავებულია. თუ ავიღებთ $k \geq n$, მაშინ მივიღებთ იმავე n კომპლექსურ რიცხვებს.

ე.ი. $\omega \neq 0$-თვის არსებობს ზუსტად n რაოდენობის $n-$ური ხარისხის ფესვი ω რიცხვიდან. ყველა ეს ფესვი მიიღება შემდეგი ფორულიდან

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k) + i\sin(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n})), \qquad k = 0,1,2,...,n-1. \qquad (1)$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ ყველა ფესვს აქვს ერთნაირი მოდულები, ხოლო არგუმენტები განსხვავებული $\frac{2\pi}{n}k$-თი, სადაც k რომელიღაც მთელი რიცხვია.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ω რიცხვიდან $n-$ური ხარისხის ფესვების შესაბამისი წერტილები სიბრტყეზე წარმოადგენენ იმ წესიერი n-კუთხედის წვეროებს, რომელიც ჩახაზულია წრეწირში რადიუსით $\sqrt[n]{\rho}$ და ცენტრით საკოორდინატო სიბრტყის სათავეში.

გავაკეთოთ კიდევ ერთი შენიშვნა $\sqrt[n]{\omega}$ აღნიშვნის შესახებ. ჩვეულებრივ $\sqrt[n]{\omega}$ სიმბოლოში იგულისხმება ყველა n-ური ხარისხის ფესვი ω რიცხვიდან. მაგალითად, $\sqrt{-1}$-ის ქვეშ იგულისხმება სიმრავლე, რომელიც შედგება ორი რიცხვისაგან: i და $-i$. ხანდახან $\sqrt[n]{\omega}$-ს განიხილავენ, როგორც ერთ რომელიღაც ფესვს. ამ შემთხვევაში აუცილებელია მივუთითოთ რომელ ფესვზეა საუბარი.

§ 7. ალგებრული განტოლებები

განვიხილოთ n-ური ხარისხის განტოლება კომპლექსური კოეფიციენტებით:

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + z_0 = 0, \qquad a_n \neq 0, n \in N. \qquad (1)$$

z_0 რიცხვს ეწოდება განტოლების ამონახსენი ანუ ფესვი, თუ განტოლებაში z-ის ნაცვლად z_0-ის ჩასმით მიიღება სწორი რიცხვითი ტოლობა.

მაგალითად, შემდეგი განტოლებები:

$$z+1-i=0$$

$$z^2-1=0$$

$$z^5+z^3+iz^2+i=0$$

$$iz^7+32(1-i)z=0$$

წარმოადგენენ შესაბამისად პირველი, მეორე, მეხუთე და მეშვიდე ხარისხის ალგებრულ განტოლებებს.

პირველი განტოლების ფესვია $-1+i$, მეორესი– 1 და-1, მესამესი– i, ცხადია, რომ 0 არის მეოთხე განტოლების ფესვი, გარდა 0-სა ამ განტოლებას, როგორც შემდეგში ვნახავთ, ექნება კიდევ ექვსი ფესვი.

ამოვხსნათ განტოლება კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში – ნიშნავს ვიპოვოთ ამ განტოლების ყველა ფესვი.

პირველი ხარისხის ალგებრული განტოლების ზოგადი სახეა:

$$a_1z+a_0=0, \qquad a_1\neq 0.$$

ასეთ განტოლებას ცხადია აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსენი $z_0=-\dfrac{a_0}{a_1}$.

მეორე ხარისხის განტოლების ზოგადი სახეა:

$$a_2z^2+a_1z+a_0=0, \qquad a_2\neq 0$$

მარცხენა მხარის გარდაქმნით მიიღება:

$$z=\frac{-a_1+\sqrt{D}}{2a_2}, \qquad \text{სადაც} \qquad D=a_1^2-4a_0a_2$$

ამ ფორმულას ისეთივე სახე აქვს, როგორიც ნამდვილი კოეფიციენტების შემთხვევაში, მაგრამ რადგან კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში კვადრატულ ფესვს ყოველთვის აქვს აზრი, $D\geq 0$ შეზღუდვა ძალას კარგავს, უფრო მეტიც დისკრიმინანტი შეიძლება აღმოჩნდეს კომპლექსური რიცხვი, ხოლო ამ რიცხვებისთვის მეტობა-ნაკლებობის ცნება საერთოდ არაა განსაზღვრული.

გადავიდეთ $n\geq 3$-ის შემთხვევაში (1) განტოლების ამონახსნთა განხილვაზე.

1799 წელს უდიდესი მათემატიკოსის კარლ გაუსის მიერ დამტკიცებული იქნა შემდეგი თეორემა:

ნებისმიერ ალგებრულ განტოლებას კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში აქვს ერთი მაინც ფესვი.

ამ თეორემას უწოდებენ ალგებრის ძირითად თეორემას.

გაუსის თეორემაზე დაყრდნობით ადვილად მტკიცდება, რომ (1) განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$a_n(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}...(z-z_k)^{\alpha_k},$$

სადაც $z_1, z_2, ..., z_k-$ რომელიღაც კომპლექსური რიცხვებია, ხოლო $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k-$ისეთი ნატურალური რიცხვებია, რომელთა ჯამი $n-$ის ტოლია. აქედან ჩანს, რომ მხოლოდ და მხოლოდ $z_1, z_2, ..., z_k$ რიცხვები იქნებიან (1) განტოლების ამონახსნები. თუ შევთანხმდებით, რომ ამონახსნს ჩავთვლით იმდენჯერ, რა ჯერადობაც აქვს, მივიღებთ გაუსის თეორემის შემდეგ ფორმულირებას:

ყოველ n- ხარისხის ალგებრულ განტოლებას კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში გააჩნია ზუსტად n ფესვი.

თუ პირველი და მეორე ხარისხის განტოლებათა ფესვების პოვნა საკმაოდ ადვილია, სამაგიეროდ მესამე და მეოთხე ხარისხისთვის ფესვთა ფორმულები საკმაოდ რთულია და მათი გამოყენება მიზანშეწონილი არ არის, ხოლო მეოთხე ხარისხზე ზევით მსგავსი ფორმულები საერთოდ არ არსებობს.

კერძო შემთხვევაში განტოლების სპეციფიკიდან გამომდინარე შეიძლება ამოიხსნას მაღალი ხარისხის განტოლებებიც.

მაგალითად, (1) ფორმულა მეექვსე პარაგრაფიდან საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება: $a_n z^n + a_0 = 0.$

მთელკოეფიციენტებიანი განტოლების ამოსახსნელად ხშირად სასარგებლოა შემდეგი თეორემა:

მთელკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლების ამონახსნები წარმოადგენს თავისუფალი წევრის გამყოფებს.

ამ თეორემის დამტკიცება საკმაოდ ადვილია. ვთქვათ, $z = k$ - მთელკოეფიციენტებიანი განტოლების მთელი ფესვია, მაშინ

$$a_n k^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 k + a_0 = 0$$

აქედან $a_0 = -k(a_n k^{n-1} + ... + a_1)$, რაც ნიშნავს, რომ k რიცხვი არის a_0-ის გამყოფი.

მაია თევდორაშვილი
აკადემიკოს ილია ვეკუას სახელობის ფიზიკა-მათემატიკური № 42 საჯარო სკოლის მათემატიკის მასწავლებელი