მაგალითი 1. ვიპოვოთ z_1=-3+2i და z_2=13–i კომპლექსური რიცხვების ჯამი და ნამრავლი:

z_1+z_2=-3+2i+(13-i)=10+ i

z_1z_2=(-3+2i)(13-i)=-39+3 i +26 i +2=-37+29 i.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ z_1=-3+2i და z_2=13- i კომპლექსური რიცხვების სხვაობა და შეფარდება

თუ გავიხსენებთ ფორმულებს

$$(c+di)-(a+bi)=c-a+(d-b)i$$
$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-cb}{a^2+b^2}i$$

z_2-z_1=13- i -(-3+2 i)=16-3 i

$$z_2/z_1=\frac{13-i}{-3+2i}=\frac{(-3)13+2(-1)}{(-3)^2+2^2}+\frac{(-3)(-1)-13*2}{(-3)^2+2^2}i=-\frac{41}{13}-\frac{23}{13}i.$$

კომპლექსური რიცხვების გაყოფისას უმჯობესია მრიცხველიც და მნიშვნელიც გავამრავლოთ მნიშვნელის შეუღლებულზე:

$$z_2/z_1=\frac{13-i}{-3+2i}=\frac{(13-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-39-26i+3i-2}{9+4}=-\frac{41}{13}-\frac{23}{13}i.$$

მაგალითი 3. ჩავწეროთ კომპლექსური რიცხვი $z=\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$ ალგებრული ფორმით

$$z=\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}=\frac{3+i}{1-2i+i+2}=\frac{3+i}{3-i}=\frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{9+6i-1}{9+1}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $z=-\sqrt{3}+i$ კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი

$|z|=\sqrt{3+1}=2$

$z=-\sqrt{3}+i$ რიცხვის ნებისმიერი არგუმენტი აკმაყოფილებს პირობას

$$\text{tg}\varphi=-1/\sqrt{3}$$

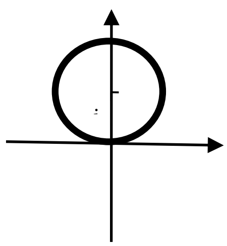
ამ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ, რომ $\varphi_k = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$

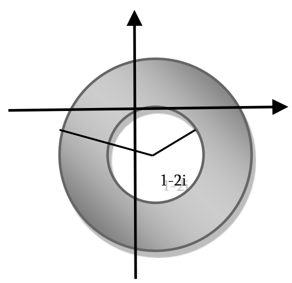
რადგან $z = -\sqrt{3} + i$ რიცხვი მეორე მეოთხედშია $k = 2n + 1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

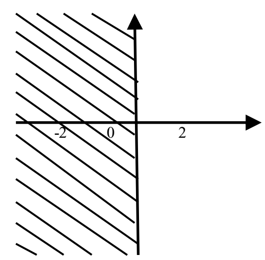
$$\arg(-\sqrt{3}+i) = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n+1) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

<u>მაგალითი 5.</u> დაშტრიხეთ სიბრტყეზე იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $|z - i| = 1$; ბ) $2 \le |z - 1 + 2i| \le 3$; გ) $|2 + z| < |2 - z|$







<u>მაგალითი 6.</u> ჩავწეროთ კომპლექსური რიცხვი $z = -1 - i$ ტრიგონომეტრიული ფორმით

$|z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = -\frac{3\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4})\right).$

<u>მაგალითი 7.</u> ჩავწეროთ კომპლექსური რიცხვი $z = 2\cos(7\pi/4) - 2i\sin(\pi/4)$ ტრიგონომეტრიული ფორმით

რადგან $\cos(\frac{7\pi}{4}) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin(-\frac{\pi}{4})$ მოდულისა და არგუმენტის მოძებნის გარეშე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$z = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right).$$

<u>მაგალითი 8.</u> ვიპოვოთ შემდეგი კომპლექსური რიცხვების ნამრავლი

$z = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{11\pi}{4}) + i\sin(\frac{11\pi}{4})\right)$ და $\omega = \sqrt{8}\left(\cos(\frac{3\pi}{8}) + i\sin(\frac{3\pi}{8})\right)$

რადგან $|z| = \sqrt{2}, \quad |\omega| = \sqrt{8},$ ამიტომ $|z\omega| = \sqrt{2}\sqrt{8} = 4,$ ხოლო $z\omega$ რიცხვის არგუმენტი იქნება $\frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = \frac{25\pi}{8}.$

ამრიგად, $z\omega = 4\left(\cos(\frac{25\pi}{8}) + i\sin(\frac{25\pi}{8})\right)$ და საბოლოოდ $z\omega = 4\left(\cos(\frac{9\pi}{8}) + i\sin(\frac{9\pi}{8})\right)$.

__მაგალითი 9.__ ჩავწეროთ კომპლექსური რიცხვი $z = \frac{i-1}{\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})}$ ტრიგონომეტრიული ფორმით.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები $z_1 = i - 1$, $z_2 = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$, რიცხვი $z_2 = \cos(\frac{\pi}{3}) + +i\sin(\frac{\pi}{3})$ ჩაწერილია ტრიგონომეტრიული ფორმით. ცხადია, რომ $|z_2| = 1$ და $\varphi_2 = \pi/3$.

ვიპოვოთ z_1 რიცხვის მოდული და არგუმენტი: $|z_1| = \sqrt{2}$ და $\varphi_1 = 3\pi/4$.

საბოლოოდ მივიღებთ

$z = \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3})\right)$, ე. ი. $z = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12})\right)$.

__მაგალითი 10.__ ჩავწეროთ კომპლექსური რიცხვი $z = (i - \sqrt{3})^{13}$ ალგებრული ფორმით

ჯერ ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით: $r = \left|i - \sqrt{3}\right| = 2$, $\varphi = 5\pi/6$.

$i - \sqrt{3} = 2\left(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$, $(r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

ამ ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$(i - \sqrt{3})^{13}$=$2^{13}\left(\cos(\frac{65\pi}{6}) + i\sin(\frac{65\pi}{6})\right)$= $2^{13}\left(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$

ასეთია $z = (i - \sqrt{3})^{13}$ რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა.

ახლა ჩავწეროთ ალგებრული ფორმით: $z = (i - \sqrt{3})^{13}$=$2^{13}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -2^{12}\sqrt{3} + 2^{12}i$.

__მაგალითი 11.__ ვიპოვოთ $\sqrt[6]{-64}$ -ის ყველა მნიშვნელობა.

ჩავწეროთ $\omega = -64$ ტრიგონომეტრიული ფორმით: -64=64($\cos(\pi) + i\sin(\pi)$).

$\omega \neq 0$-თვის არსებობს ზუსტად n რაოდენობის $n-$ური ხარისხის ფესვი ω რიცხვიდან. ყველა ეს ფესვი მიიღება შემდეგი ფორმულიდან

$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k) + i\sin(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k))$, $k = 0; 1; 2; \ldots; n-1$

მივიღებთ $z_k = \sqrt[6]{64}(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}k)+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}k)), \quad k = 0,1,2,3,4,5.$

ამრიგად, $z_0 = 2(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})) = \sqrt{3}+i$

$$z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})) = 2i$$

$$z_2 = 2(\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6})) = -\sqrt{3}+i$$

$$z_3 = 2(\cos(\frac{7\pi}{6})+i\sin(\frac{7\pi}{6})) = -\sqrt{3}-i$$

$$z_4 = 2(\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2})) = -2i$$

$$z_5 = 2(\cos(\frac{11\pi}{6})+i\sin(\frac{11\pi}{6})) = \sqrt{3}-i$$

z_k რიცხვების შესაბამისი წერტილები წარმოადგენენ იმ წესიერი ექვსკუთხედის წვეროებს, რომელიც ჩახაზულია წრეწირში ცენტრით $z = 0$ და რადიუსით 2.

ახლა განვიხილოთ კომპლექსურკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლებები

მაგალითი 12. ამოვხსნათ განტოლება $z^2+3z+3=0$

როგორც ვიცით, $a_2z^2+a_1z+a_0=0, \quad a_2 \neq 0$ განტოლების ფესვები გამოითვლება შემდეგი ფორმულის გამოყენებით $z = \frac{-a_1+\sqrt{D}}{2a_2}$, სადაც $D = a_1^2-4a_0a_2$. (*)

აქედან გამომდინარეობს, რომ $z = \frac{-3+\sqrt{9-12}}{2} = \frac{-3+\sqrt{-3}}{2}$.

თუ გავითვალისწინებთ,რომ $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$, მივიღებთ

$z_1 = -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad z_2 = -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

მაგალითი 13. ამოვხსნათ განტოლება $z^2-8z-3iz+13+13i=0$

კვადრატული განტოლების ფესვთა ფორმულის (*) გამოყენებით მივიღებთ

$$z = \frac{8+3i+\sqrt{(8+3i)^2-4(13+13i)}}{2} = \frac{8+3i+\sqrt{3-4i}}{2}.$$

ახლა ვიპოვოთ $\sqrt{3-4i}$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ვთქვათ, $\sqrt{3-4i}=x+yi$, მაშინ $3–4i=x^2+2xyi-y^2=x^2-y^2+2xyi$,

მაშინ $x^2-y^2=3$ და $xy=-2$, სადაც x და y ნამდვილი რიცხვებია. სისტემის ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ $x=2, y=-1$ ან $x=-2, y=1$. ამიტომ

$\sqrt{3-4i}=2-i$ ან $\sqrt{3-4i}=-2+2i$ და

$z_1=\frac{8+3i+2-i}{2}=5+i,\qquad z_2=\frac{8+3i-2+i}{2}=3+2i.$

მაგალითი 14. ამოვხსნათ განტოლება $z^3-6z-9=0$

$z=3$ ამ განტოლების მთელი ამონახსნია, ამიტომ $z^3-6z-9=(z-3)(z^2+3z+3)$

ახლა ამოვხსნათ $z^2+3z+3=0$ განტოლება. $z_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\qquad z_2=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

მაგალითი 15. იპოვეთ $2z^3-5z^2-2z-2=0$ განტოლების მთელი ფესვები

ამ განტოლების მთელი ფესვები შეიძლება იყოს მხოლოდ $\pm1, \pm2$. (იხ. თეორიული მასალა გაზეთის წინა ნომრებში). თუ ამ რიცხვებს ჩავსვამთ განტოლებაში, ვნახავთ, რომ არცერთი ამ ოთხი რიცხვიდან არ აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას. ე. ი. ამ განტოლებას მთელი ამონახსნები არა აქვს.

მაგალითი 16. ამოვხსნათ განტოლება $z^5-2z^4-13z^3+26z^2+36z-72=0$

თუ შევამოწმებთ თავისუფალი წევრის გამყოფებს, ვნახავთ რომ $z=\pm2$ ამ განტოლების ფესვებია. გავყოთ განტოლების მარცხენა მხარე (z^2-4)-ზე.

მივიღებთ $z^3-2z^2-9z+18=0$, რომლის ფესვია $z=2$. გავყოთ $(z-2)$-ზე, მივიღებთ (z^2-9)-ს. ამრიგად, განტოლების მარცხენა მხარე იშლება შემდეგ მამრავლებად:

$$(z+3)(z+2)(z-2)^2(z-3)=0$$

ამიტომ განტოლებას ექნება სამი ერთჯერადი(მარტივი) ფესვი $z=-3$, $z=-2$, $z=3$ და ერთი ორჯერადი ფესვი $z=2$.

ახლა კი გთავაზობთ იმ სავარჯიშოების განხილვას, რომლებიც წარმოდგენილია 2010-2015 წლების მასწავლებელთა სასერთიფიკაციო გამოცდებზე.

2010 წელი (ამოცანა 24). x_1 და x_2 სიდიდეების ქვემოთ ჩამოთვლილი მნიშვნელობებიდან რომლები შეიძლება იყოს $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ფესვები, თუ a, b და c ნამდვილი რიცხვებია?

ა) $x_1=3$ და $x_2=1-i$ ბ) $x_1=x_2=1+i$

გ) $x_1=1-i$ და $x_2=1+2i$ დ) $x_1=1+2i$ და $x_2=1-2i$

ამოხსნა: რადგან კვადრატული განტოლების კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, ამიტომ მისი ამონახსნები უნდა იყოს შეუღლებული რიცხვები. ასეთებია მხოლოდ დ) $x_1=1+2i$ და $x_2=1-2i$

2010 წელი (ამოცანა 24). $\frac{1}{1+i}$ კომპლექსური რიცხვის წარმოსახვითი ნაწილი ტოლია

ა) 1; ბ) i გ) $\frac{1}{2}$ დ) $-\frac{1}{2}$

ამოხსნა: $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1+1}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ (მნიშვნელიცა და მრიცხველიც გავამრავლეთ მნიშვნელის შეუღლებულზე)

სწორი პასუხია: **დ)** $-\mathbf{\frac{1}{2}}$

2011 წელი (ამოცანა 24). $\frac{2+3i}{i-1}$ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი ტოლია

ა) 1 ბ) -2 გ) $\frac{1}{2}$ დ) $-\frac{5}{2}$

ამოხსნა: მნიშვნელიცა და მრიცხველიც გავამრავლოთ მნიშვნელის შეუღლებულზე

$$\frac{2+3i}{i-1}=\frac{(2+3i)(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\frac{2i+2+3i^2+3i}{i^2-1}=\frac{-1+5i}{-1-1}=\frac{-1+5i}{-2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

სწორი პასუხია: **გ)** $\mathbf{\frac{1}{2}}$

2012 წელი (ამოცანა 24). კომპლექსური რიცხვის მოდული უდრის 2-ს, ხოლო არგუმენტია $\frac{\pi}{3}$. იპოვეთ ამ რიცხვის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების სხვაობა.

ა) $1-\sqrt{3}$ ბ) $1+\sqrt{3}$ გ) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ დ) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

ამოხსნა: ჩავწეროთ ეს რიცხვი ტრიგონომეტრიული ფორმით

$$z=2\,(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))=2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i)=1+\sqrt{3}i$$

სწორი პასუხია: **ბ)** $\mathbf{1+\sqrt{3}}$

2013 წელი (ამოცანა 24). გაამარტივეთ კომპლექსური რიცხვითი გამოსახულება $\frac{(3+i)(2-3i)}{1+i}$

ა) $8+i$ ბ) $1-8i$ გ) $1+8i$ დ) $8-i$

ამოხსნა: მნიშვნელიცა და მრიცხველიც გავამრავლოთ მნიშვნელის შეუღლებულზე

$$\frac{(3+i)(2-3i)}{1+i} = \frac{6-9i+2i-3i^2}{1+i} = \frac{(9-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{9-9i-7i+7i^2}{1-i^2} = \frac{2-16i}{1+1} = 1-8i$$

სწორი პასუხია: **ბ) $\mathbf{1-8}\boldsymbol{i}$**

2014 წელი (ამოცანა 24). $x = a+bi$ კომპლექსური რიცხვი არის $x^2 = i$ განტოლების ამონახსნი. იპოვეთ $|a|$, თუ $a, b \in R$

ა) $\frac{1}{4}$ ბ) $\frac{1}{2}$ გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ დ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ამოხსნა: $(a+bi)^2 = i$, $a^2+2abi+bi^2 = i$, $a^2-b^2+2abi = 0+1i$, $a^2-b^2=0$ (1) $2ab=1$ (2) პირველი განტოლებიდან გამოვსახოთ b და ჩავსვათ მეორეში, მივიღებთ

$a^2 = \frac{1}{2}$ აქედან კი $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

სწორი პასუხია: **გ) $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.**

2015 წელი (ამოცანა 24). $(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})^{12} =$

ა) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ბ) 1 გ) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ დ) $1-i$

ამოხსნა: $(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})^{12} = \left(\cos(12\cdot\frac{\pi}{3}) + i\sin(12\cdot\frac{\pi}{3})\right) = cos4\pi + isin4\pi = 1$

სწორი პასუხია: **ბ) 1**

მაია თევდორაშვილი
აკადემიკოს ილია ვეკუას სახელობის ფიზიკა-მათემატიკური
№ 42 საჯარო სკოლის მათემატიკის მასწავლებელი