

§8 სისტემები

$$8.14) \begin{cases} 7x + 9y = 8 \\ 9x - 8y = 69 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8-7x}{9} \\ 9x - \frac{8(8-7x)}{9} = 69 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8-7x}{9} \\ 81x - 64 + 56x = 621 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$8.2 \quad 4) \begin{cases} 5x + 6y = 13 \\ 7x + 18y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13-5x}{6} \\ 7x + 18 \cdot \frac{13-5x}{6} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13-5x}{6} \\ 7x + 39 - 15x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$8.3 \quad 4) \begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ -4x - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6-8 = -2 \\ x = \frac{6-3y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$8.4 \quad 4) \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 7x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 21y = 56 \\ -14x + 10y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11y = 56 + 10 \\ x = \frac{56+21y}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$8.5 \quad 1) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = 11. \quad 4) \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} = a \cdot a - a^2 \cdot 1 = a^2 - a^2 = 0.$$

$$8.6 \quad 4) \begin{cases} 12x + 16y = -1 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \\ \Delta = \begin{vmatrix} 12 & 16 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot 4 - 3 \cdot 16 = 0 \\ \Delta x \neq 0 \quad \Delta y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ y \in \emptyset \end{cases}$$

$$8.7 \quad 4) \begin{cases} 25x - 4y + 1 = 0 \\ 31x - 5y + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x - 4y = -1 \\ 31x - 5y = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \\ \Delta = \begin{vmatrix} 25 & -4 \\ 31 & -5 \end{vmatrix} = 25 \cdot (-5) - 31 \cdot (-4) = -1 \\ \Delta x = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -16 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 64 = -59 \\ \Delta y = \begin{vmatrix} 25 & -1 \\ 31 & -16 \end{vmatrix} = -400 + 31 = -369 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-59}{-1} \\ y = \frac{-369}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 59 \\ y = 369 \end{cases}$$

$$8.8 \quad 4) \begin{cases} 5(3x + y) - 8(x - 6y) = 200 \\ 20(2x - 3y) - 13(x - y) = 520 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 53y = 200 \\ 27x + 73y = 520 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{200-53y}{7} \\ \frac{27(200-53y)}{7} + 73y = 520 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{200-53y}{7} \\ y = \frac{520 \cdot 7 - 27 \cdot 200}{-27 \cdot 53 + 73} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$8.9 \quad 4) \quad \begin{cases} \frac{x+y}{3} + \frac{y}{5} = -2 \\ \frac{2x-y}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x+y) + 3y = -30 \\ 4(2x-y) - 9x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 8y = -30 \\ -x - 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y - 18 \\ 5(-4y - 18) + 8y = -30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y - 18 \\ -12y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y - 18 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$8.10 \quad 4) \quad \begin{cases} \frac{2x-y+3}{3} - \frac{x-2y+3}{4} = 4 \\ \frac{3x-4y+3}{4} + \frac{4x-2y-9}{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x-y+3) - 3(x-2y+3) = 48 \\ 3(3x-4y+3) + 4(4x-2y-9) = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y=45 \\ 25x-20y=75 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{45-2y}{5} \\ 25 \cdot \frac{45-2y}{5} - 20y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{45-2y}{5} \\ 225 - 10y - 20y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{45-2y}{5} \\ y = \frac{75-225}{-30} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$8.11 \quad 2) \quad \begin{cases} 4(0,1x+1) + 5 = 1,1y \\ \frac{11+0,3y-x}{x} - 5 = 4\left(\frac{1}{x} - 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 0,4x + 9 = 1,1y \\ 11 + 0,3y - x - 5x = 4 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = \frac{1,1y-9}{0,4} \\ 11 + 0,3y - 2\frac{1,1y-9}{0,4} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = \frac{1,1y-9}{0,4} \\ y = \frac{7 \cdot 0,2 + 9}{1,1 - 0,06} = \frac{10,4}{1,04} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2x + 5y - 10 = xy - x + 2y - 2 \\ xy + 7x - 4y - 28 = xy + 4x - 3y - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 8 \\ 3x - y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 8 \\ (3y - 8) \cdot y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 8 \\ y = \frac{16 + 3 \cdot 8}{3 \cdot 3 - 1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$8.12 \quad 3) \quad \begin{cases} \frac{x-1}{x+15} = \frac{y-6}{y+2} \\ \frac{x-3}{x} = \frac{y-4}{y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq -15; x \neq 0; y \neq -2; y \neq 1 \\ (x-1)(y+2) = (x+15)(y-6) \\ (x-3)(y-1) = x(y-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-15; 0\}; y \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\} \\ xy + 2x - y - 2 = xy - 6x + 15y - 90 \\ xy - x - 3y + 3 = xy - 4x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-15; 0\}; y \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\} \\ 8x - 16y = -88 \\ 3x - 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-15; 0\}; y \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\} \\ x = 2y - 11 \\ 3(2y - 11) - 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-15; 0\}; y \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\} \\ x = 9 \\ y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} \frac{0,2x+0,1y}{2} - \frac{4x-y}{10} = \frac{3x+0,5y}{30} + \frac{x-y}{5} \\ \frac{3x+2y-1}{8} = 3 - \frac{0,8x-5y}{41} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1,5y - 12x + 3y = 3x + 0,5y + 6x - 6y \\ 123x + 82y - 41 = (123 - 0,8x + 5y) \cdot 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -18x + 10y = 0 \\ 129,4x + 42y = 41 + 8 \cdot 123 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,8x \\ 129,4x + 75,6x = 41 \cdot 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{41 \cdot 25}{205} = 5 \\ y = 1,8 \cdot 5 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$8.13 \quad 4) \quad \begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{60}{x} - \frac{28}{y} = 36 \\ -\frac{60}{x} - \frac{135}{y} = -525 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{163}{y} = -525 + 36 = -489 \\ \frac{15}{x} = 9 + \frac{7}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \frac{15}{x} = 9 + 21 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$8.14 \quad 4) \quad \begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7 \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = u; \frac{1}{x+3y} = v \\ 27u + 32v = 7 \\ 45u - 48v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = u; \frac{1}{x+3y} = v \\ u = \frac{7-32v}{27} \\ 45 \cdot \frac{7-32v}{27} - 48v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = u; \frac{1}{x+3y} = v \\ u = \frac{7-32v}{27} \\ 35 - 160v - 144v = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = u; \frac{1}{x+3y} = v \\ u = \frac{7-32v}{27} \\ v = \frac{35+3}{304} = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = u; \frac{1}{x+3y} = v \\ u = \frac{1}{9} \\ v = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{x+3y} = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=9 \\ x+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-3y \\ 2(8-3y)-y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-3y \\ y = \frac{9-2 \cdot 8}{-6-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$$

$$8.15 \quad 3) \quad \begin{cases} \frac{1}{x-y+2} + \frac{1}{x-y} = 0,1 \\ \frac{1}{x-y+2} + \frac{1}{x+y-1} = 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-y+2} - \frac{1}{x+y-1} = 0,1 \\ \frac{1}{x-y+2} + \frac{1}{x+y-1} = 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-y+2} = 0,1 + 0,3 = 0,4 = \frac{4}{10} \\ \frac{2}{x+y-1} = 0,3 - 0,1 = \frac{2}{10} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-y+2) = 20 \\ x+y-1 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2 = \frac{20}{4} = 5 \\ x+y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3+11 = 14 \\ 2y = 11-3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases}$$

$$8.16 \quad 4) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \\ x+y=8 \\ x, y \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (8-x)^2 = 40 \\ y=8-x \\ x, y \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 12 = 0 \\ y=8-x \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=6 \\ y=8-x \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=6 \\ x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

$$8.17 \quad 4) \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63 \\ x-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x(x+3) + (x+3)^2 = 63 \\ y=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 54 = 0 \\ y=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ x=6 \\ y=x+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ y=-6 \\ x=6 \\ y=9 \end{cases}$$

$$8.18 \quad 2) \quad \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{4}{5} \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{xy} = \frac{4}{5} \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{xy} = \frac{4}{5} \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+4 \\ y(y+4)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+4 \\ y^2 + 4y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 4 \\ y = -5 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \\ x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (x-2)(y+1) = 1 \\ x-y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+3 \\ (y+3-2)(y+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+3 \\ y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+3 \\ y = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$8.19 \quad 2) \begin{cases} \frac{3}{x+5} + \frac{2}{y-3} = 2 \\ \frac{4}{x-2} = \frac{1}{y-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}; y \in \mathbb{R} \setminus \{3, 6\} \\ \frac{3}{x+5} + \frac{2}{y-3} = 2 \\ 4(y-6) = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}; y \in \mathbb{R} \setminus \{3, 6\} \\ x = 4y - 22 \\ \frac{3}{4y-17} + \frac{2}{y-3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}; y \in \mathbb{R} \setminus \{3, 6\} \\ x = 4y - 22 \\ 3y - 9 + 8y - 34 = \\ = 8y^2 - 58y + 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}; y \in \mathbb{R} \setminus \{3, 6\} \\ x = 4y - 22 \\ 8y^2 - 69y + 145 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}; y \in \mathbb{R} \setminus \{3, 6\} \\ x = 4y - 22 \\ \begin{cases} y = 3\frac{5}{8} \\ y = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \\ x = -7\frac{1}{2} \\ y = 3\frac{5}{8} \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{x^2+y+1}{y^2+x+1} = \frac{3}{2} \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ \frac{(y+1)^2+y+1}{y^2+y+1+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ \frac{y^2+3y+2}{y^2+y+2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ 2y^2+6y+4 = 3y^2+3y+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ y^2-3y+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ \begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$8.20 \quad 2) \begin{cases} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = \frac{1}{2} \\ \frac{x-y}{x+y} = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y \neq 0; 3y-x \neq 0; x+y \neq 0 \\ \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = \frac{1}{2} \\ 5x-5y = 2x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{y}{3}; x \neq 3y; x \neq -y \\ \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = \frac{1}{2} \\ x = \frac{7y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{y}{3}; x \neq 3y; x \neq -y \\ x = \frac{7y}{3} \\ \frac{y+3}{(7y-y)(3y-\frac{7y}{3})} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{y}{3}; x \neq 3y; x \neq -y \\ x = \frac{7y}{3} \\ 6(y+3) = 6y \cdot 2y \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{y}{3}; x \neq 3y; x \neq -y \\ x = \frac{7y}{3} \\ 2y^2 - y - 3 = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{y}{3}; x \neq 3y; x \neq -y \\ x = \frac{7y}{3} \\ \begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{3} \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-5}{x-2} + \frac{2y-3}{y-1} = 2 \\ 3x-4y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \setminus \{2\}, y \in R \setminus \{1\} \\ x = \frac{1+4y}{3} \\ \frac{2(1+4y)-5}{3} + \frac{2y-3}{y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \setminus \{2\}, y \in R \setminus \{1\} \\ x = \frac{1+4y}{3} \\ \frac{4y-4}{4y-5} + \frac{2y-3}{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \setminus \{2\}, y \in R \setminus \{1\} \\ x = \frac{1+4y}{3} \\ (4y-4)(y-1) + (4y-5) \times \\ \times (2y-3) = (4y-5)(2y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \setminus \{2\}, y \in R \setminus \{1\} \\ x = \frac{1+4y}{3} \\ 4y^2 - 8y + 4 + 8y^2 - 22y + 15 = 8y^2 - 18y + 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \setminus \{2\}, y \in R \setminus \{1\} \\ x = \frac{1+4y}{3} \\ 4y^2 - 12y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \setminus \{2\}, y \in R \setminus \{1\} \\ x = \frac{1+4y}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \setminus \{2\}, y \in R \setminus \{1\} \\ x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$8.21 \quad 4) \begin{cases} 2x^2 - 5xy + y^2 + 10x + 12y = 100 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+3y}{2} \\ 2 \cdot \left(\frac{1+3y}{2}\right)^2 - \frac{5y(1+3y)}{2} + y^2 + \frac{10(1+3y)}{2} + 12y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+3y}{2} \\ 4y^2 - 55y + 179 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+3y}{2} \\ y = \frac{27}{4} \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{85}{8} \\ y = \frac{27}{4} \\ x = 11 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$8.22 \quad 1) \begin{cases} x+y+xy=5 \\ x+y-xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)=5+1=6 \\ 2xy=5-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y(3-y)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y=1 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} xy+x+y=29 \\ xy-2(x+y)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)=29-2=27 \\ xy+x+y=29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ xy+x+y=29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y \\ y(9-y)+9-y+y=29 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y \\ y^2-9y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y \\ y=4 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \\ x=4 \\ y=5 \end{cases}$$

$$8.23 \quad 1) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x = 18 + 6 \\ 2y^2 + 2y = 18 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 = 0 \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \\ y = -3 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -4 \\ y = 2 \\ y = -3 \\ x = 3 \\ y = -3 \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy \\ 4x - 4y = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)(2x-y) = 0 \\ 4x-4y = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = 0 \\ 2x-y = 0 \\ 4x-4y = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 4 \cdot 2y - 4y = 2y^2 \\ x = \frac{y}{2} \\ 2y - 4y = \frac{y^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^2 - 2y = 0 \\ x = \frac{y}{2} \\ y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 0 \\ y = 2 \\ x = \frac{y}{2} \\ y = 0 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 4 \\ y = 2 \\ x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14 \\ x^2 + xy - y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx, tx \neq 0 \\ x^2(2t^2 - 3t + 2) = 14 \\ x^2(1 + t - t^2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx, tx \neq 0 \\ \frac{2t^2 - 3t + 2}{1 + t - t^2} = \frac{14}{5} \\ x^2(1 + t - t^2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx, tx \neq 0 \\ 24t^2 - 29t - 4 = 0 \\ x^2(1 + t - t^2) = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx, tx \neq 0 \\ t = -\frac{1}{8} \\ t = \frac{4}{3} \\ x^2(1 + t - t^2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{x}{8} \\ x^2(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{64}) = 5 \\ y = \frac{4x}{3} \\ x^2(1 + \frac{4}{3} - \frac{16}{9}) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{x}{8} \\ x^2 = \frac{64}{11} \\ y = \frac{4x}{3} \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{\sqrt{11}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{11}} \\ x = \frac{8}{\sqrt{11}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ x = -3 \\ y = -4 \\ x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10 \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 7x - 8y = 10 + 10 \\ 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 10y = 20 \\ 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ 2x^2 - 5x(x - 2) + 3x - 2(x - 2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ 3x^2 - 11x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x = \frac{2}{3} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$8.241) \begin{cases} (x+y)(8-x) = 10 \\ (x+y)(5-y) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8-x}{5-y} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \\ (x+y)(5-y) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-2x = 5-y \\ (x+y)(5-y) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 11 \\ (3x-11)(16-2x) = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 35x + 98 = 0 \\ y = 2x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{3} \\ x = 7 \\ y = 2x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 8 - 6y + 5y - 5 = 0 \\ 2x^2 - 3x + 5 - 5 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x = 0 \\ y = 1 \\ x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0 \\ (x-3)(y-2) = y^2 - 3y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0 \\ (x-3)(y-2) - (y-1)(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0 \\ (y-2)(x-3-y+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0 \\ y - 2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0 \\ y = 2 \\ x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 20 - 3x - 2 + 22 = 0 \\ y = 2 \\ x^2 - 5(x-2)^2 - 3x - x + 2 + 22 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ y = 2 \\ 4x^2 - 16x - 4 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ y = 2 \\ x = 2 - \sqrt{5} \\ x = 2 + \sqrt{5} \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ x = 3 \\ y = 2 \\ x = 2 - \sqrt{5} \\ y = -\sqrt{5} \\ x = 2 + \sqrt{5} \\ y = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (x+y)^2 - 4(x+y) = 45 \\ (x-y)^2 - 2(x-y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 4(x+y) - 45 = 0 \\ (x-y)^2 - 2(x-y) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -5 \\ x+y = 9 \\ x-y = -1 \\ x-y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -5 \\ x-y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -6 \\ 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -5 \\ x-y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2 \\ 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 9 \\ x-y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 9 \\ x-y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 12 \\ 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$8.25 \quad 4) \begin{cases} x+y = -5 \\ xy = -36 \end{cases} \quad Z^2 + 5Z - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -9 \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{პ.ო. ხახტაშვილის ამონახსნები} \quad \begin{cases} x = -9 \\ y = 4 \\ x = 4 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$8.26 \quad 4) \begin{cases} x-y = 3 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+(-y) = 3 \\ x \cdot (-y) = +2 \end{cases} \quad Z^2 - 3Z + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{აქედან} \quad \begin{cases} x = 1 \\ -y = 2 \\ x = 2 \\ -y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$8.27 \quad 4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ xy = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 y^2 = 225 \\ xy > 0 \end{cases} \quad Z^2 - 34Z + 225 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 9 \\ z = 25 \end{cases} \quad \text{აქედან} \quad \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 25 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \\ x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 9 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \\ x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$8.28 \quad 1) \begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^3 y^3 = -8 \end{cases} \quad Z^2 - 7Z - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = 8 \end{cases} \quad \text{აქედან} \quad \begin{cases} x^3 = -1 \\ y^3 = 8 \\ x^3 = 8 \\ y^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 9 \\ \frac{(x+y)x}{y} = 20 \end{cases} \quad Z^2 - 9Z + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{აქედან} \quad \begin{cases} x+y = 4 \\ \frac{x}{y} = 5 \\ x+y = 5 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 4 \\ x = 5y \\ x+y = 5 \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y \\ 5y + y = 4 \\ x = 4y \\ 4y + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \quad 3) \quad \begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (x+y) = 5 \\ xy(x+y) = 6 \end{cases} \quad Z^2 - 5Z + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 3 \\ xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y(3 - y) = 2 \\ x = 2 - y \\ y(2 - y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \\ x = 2 - y \\ y^2 - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y = 1 \\ y = 2 \\ x = 2 - y \\ y \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$8.29 \quad 1) \quad \begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1 \\ 3xy + 7y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \quad tx \neq 0 \\ x^2(1 - 5t^2) = -1 \\ x^2(3t + 7t^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \quad tx \neq 0 \quad 3t + 7t^2 \neq 0 \\ \frac{5t^2 - 1}{3t + 7t^2} = 1 \\ x^2(5t^2 - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \quad tx \neq 0 \quad t \neq -\frac{3}{7} \\ 2t^2 + 3t + 1 = 0 \\ x^2(5t^2 - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \quad tx \neq 0 \quad t \neq -\frac{3}{7} \\ t = -1 \\ t = -\frac{1}{2} \\ x^2(5t^2 - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2(5 \cdot (-1)^2 - 1) = 1 \\ y = -\frac{x}{2} \\ x^2(5 \cdot (-\frac{1}{2})^2 - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ y = -x \\ x^2 = 4 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ y = -x \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \\ y = 1 \\ x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 3y^2 - 2xy = 160 \\ y^2 - 3xy - 2x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \quad tx \neq 0 \\ x^2(3t^2 - 2t) = 160 \\ x^2(t^2 - 3t - 2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ \frac{3t^2 - 2t}{t^2 - 3t - 2} = \frac{160}{8} = 20 \\ x^2(t^2 - 3t - 2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ 17t^2 - 58t - 40 = 0 \\ x^2(t^2 - 3t - 2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ t = -\frac{10}{17} \\ t = 4 \\ x^2(t^2 - 3t - 2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(\frac{100}{289} + \frac{30}{17} - 2\right) = 8 \\ y = -\frac{10}{17}x \\ x^2(4^2 - 3 \cdot 4 - 2) = 8 \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 72.25 \\ y = -\frac{10x}{17} \\ x^2 = 4 \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8.5 \\ x = 8.5 \\ y = -\frac{10x}{17} \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ y = 4x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8.5 \\ y = 5 \\ x = 8.5 \\ y = -5 \\ x = -2 \\ y = -8 \\ x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x^2(1 - 3t + t^2) = -1 \\ x^2(3 - t + 3t^2) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ \frac{1 - 3t + t^2}{3 - t + 3t^2} = -\frac{1}{13} \\ x^2(3 - t + 3t^2) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ 16t^2 - 40t + 16 = 0 \\ x^2(3 - t + 3t^2) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ t = \frac{1}{2} \\ t = 2 \\ x^2(3-t+3t^2) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}) = 13 \\ y = \frac{x}{2} \\ x^2(3-2+12) = 13 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \frac{x}{2} \\ x = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \\ y = \frac{x}{2} \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x^2(3-4t+2t^2) = 17 \\ x^2(1-t^2) = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ \frac{3-4t+2t^2}{t^2-1} = \frac{17}{16} \\ x^2(t^2-1) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ 15t^2 - 64t + 65 = 0 \\ x^2(t^2-1) = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ t = \frac{13}{5} \\ t = \frac{5}{3} \\ x^2(t^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(\frac{169}{25}-1) = 16 \\ y = \frac{13}{5}x \\ x^2(\frac{25}{9}-1) = 16 \\ y = \frac{5}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{25}{9} \\ y = \frac{13}{5}x \\ x^2 = 9 \\ y = \frac{5}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \\ y = \frac{13}{5}x \\ \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \\ y = \frac{5}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{5}{3}, y = -\frac{13}{3} \\ x = \frac{5}{3}, y = \frac{13}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3, y = -5 \\ x = 3, y = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$8.30 \quad 1) \begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x^2(1-2t-t^2) = 2 \\ x^2(t+t^2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ \frac{1-2t-t^2}{t+t^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x^2(t+t^2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ 3t^2 + 5t - 2 = 0 \\ x^2(t+t^2) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ t = \frac{1}{3} \\ t = -2 \\ x^2(t+t^2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}) = 4 \\ y = \frac{x}{3} \\ x^2(-2+4) = 4 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = \frac{x}{3} \\ x^2 = 2 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \\ y = \frac{x}{3} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 6 \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x^2(1+t+4t^2) = 6 \\ x^2(3+8t^2) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ \frac{1+t+4t^2}{3+8t^2} = \frac{3}{7} \\ x^2(3+8t^2) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ 4t^2 + 7t - 2 = 0 \\ x^2(3+8t^2) = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ t = -2 \\ t = \frac{1}{4} \\ x^2(3+8t^2) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3+32) = 14 \\ y = -2x \\ x^2(3+\frac{1}{2}) = 14 \\ y = \frac{x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ x = \frac{\sqrt{10}}{5} \\ y = -2x \\ y = \frac{x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{10}}{5}; y = \frac{2\sqrt{10}}{5} \\ x = \frac{\sqrt{10}}{5}; y = -\frac{2\sqrt{10}}{5} \\ x = -2; y = -\frac{1}{2} \\ x = 2; y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x^2(5-6t+5t^2) = 29 \\ x^2(7-8t+7t^2) = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ \frac{5-6t+5t^2}{7-8t+7t^2} = \frac{29}{43} \\ x^2(7-8t+7t^2) = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ 12t^2 - 26t + 12 = 0 \\ x^2(7-8t+7t^2) = 43 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{3}{2} \\ x^2(7-8t+7t^2) = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(7-8 \cdot \frac{2}{3} + 7 \cdot \frac{4}{9}) = 43 \\ y = \frac{2}{3}x \\ x^2(7-8 \cdot \frac{3}{2} + 7 \cdot \frac{9}{4}) = 43 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = \frac{2}{3}x \\ x^2 = 4 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \\ y = \frac{2}{3}x \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -3 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \neq 0 \\ x^2(3+5t-4t^2) = 38 \\ x^2(5-9t-3t^2) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \neq 0 \\ \frac{3+5t-4t^2}{5-9t-3t^2} = \frac{38}{15} \\ x^2(5-9t-3t^2) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \neq 0 \\ 54t^2 + 417t - 145 = 0 \\ x^2(5-9t-3t^2) = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \neq 0 \\ t = -\frac{145}{18} \\ t = \frac{1}{3} \\ x^2(5-9t-3t^2) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \left(5 + 9 \cdot \frac{145}{18} - 3 \left(\frac{-145}{18} \right)^2 \right) = 15 \\ y = -\frac{145}{18}x \\ x^2 \left(5 - 9 \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \frac{1}{9} \right) = 15 \\ y = \frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -\frac{324}{3053} < 0 \\ y = -\frac{145}{18}x \\ x^2 = 9 \\ y = \frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$8.31 \quad 1) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{34}{15} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ \frac{x}{y} + \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{34}{15} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ 15 \left(\frac{x}{y} \right)^2 - 34 \left(\frac{x}{y} \right) + 15 = 0 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \\ \frac{y}{x} = \frac{5}{3} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}y \\ \frac{9}{25}y^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}y \\ y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}y \\ \begin{cases} y = -5 \\ y = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}y \\ \frac{25}{9}y^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}y \\ y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}y \\ \begin{cases} y = -3 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{26}{5} \\ x^2 - y^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \neq 0 \\ \frac{1}{t} + t = \frac{26}{5} \\ x^2(1-t^2) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \neq 0 \\ 5t^2 - 26t + 5 = 0 \\ x^2(1-t^2) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \neq 0 \\ \begin{cases} t = \frac{1}{5} \\ t = 5 \end{cases} \\ x^2(1-t^2) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2(1-\frac{1}{25}) = 24 \\ y = \frac{1}{5}x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2(1-25) = 24 \\ y = 5x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y = \frac{1}{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -5 \\ x = 5 \end{cases} \\ y = \frac{1}{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{9}{20} \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ \frac{x}{y} - \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{9}{20} \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ 20\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 9\frac{x}{y} - 20 = 0 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{4}{5} \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{4} \end{cases} \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{4}{5} \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{4} \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{4}{5}y \\ \frac{16}{25}y^2 - y^2 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{5}{4}y \\ \frac{25}{16}y^2 - y^2 = 9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{4}{5}y \\ y^2 = -25 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{5}{4}y \\ y^2 = 16 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{4}y \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{5}{4}y \\ y = 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ \frac{x}{y} - \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{5}{6} \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ 6\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \end{cases} \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ \frac{4}{9}y^2 + y^2 = 13 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ \frac{9}{4}y^2 + y^2 = 13 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ y^2 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ y^2 = 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ \begin{cases} y = -3 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ \begin{cases} y = -2 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$8.321) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{5}{2} \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \\ 2\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 - 5\sqrt{\frac{x}{y}} + 2 = 0 \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = 2 \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2} \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{4} \\ \frac{y}{4} + y = 10 \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \\ x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{41}{20} \\ x + y = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{41}{20} \\ x + y = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \\ 20\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 - 41\sqrt{\frac{x}{y}} + 20 = 0 \\ x + y = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{4}{5} \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{5}{4} \\ x + y = 41 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{4}{5} \\ x + y = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{25}y \\ \frac{16}{25}y + y = 41 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{5}{4} \\ x + y = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 25 \\ x = 25 \\ y = 16 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{6} \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{5}{6} \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \\ 6\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 - 5\sqrt{\frac{x}{y}} - 6 = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = -\frac{2}{3} < 0 \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2} \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2} \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{9}{4} \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4}y \\ \frac{9}{4}y - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \cdot 4 = 9 \\ y = 4 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \quad y > 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \quad y > 0 \\ \sqrt{x} = 3 - \sqrt{y} \\ \sqrt{y}(3 - \sqrt{y}) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \quad y > 0 \\ \sqrt{x} = 3 - \sqrt{y} \\ (\sqrt{y})^2 - 3\sqrt{y} + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \quad y > 0 \\ \sqrt{x} = 3 - \sqrt{y} \\ \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$8.33 \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 & y > 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 & y > 0 \\ \sqrt{x} = 5 - \sqrt{y} \\ \sqrt{y}(5 - \sqrt{y}) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 & y > 0 \\ \sqrt{x} = 5 - \sqrt{y} \\ (\sqrt{y})^2 - 5\sqrt{y} + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 & y > 0, \\ \sqrt{x} = 5 - \sqrt{y} \\ \begin{cases} \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{y} = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases} \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2} \\ x + y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 & y > 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}} = \frac{5}{2} \\ x + y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 & y > 0 \\ 2\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)^2 - 5\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + 2 = 0 \\ x + y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 & y > 0 \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 2 \end{cases} \\ x + y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 25 \\ x + y = 25 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \\ x + y = 25 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ x + y = 25 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{y}{4} \\ \frac{y}{4} + y = 25 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4y \\ 4y + y = 25 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 5 \\ y = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 20 \\ y = 5 \end{cases} \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18 \\ xy + x^2 + y^2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y) + (x + y)^2 = 18 + 2xy \\ (x + y)^2 = 19 + xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -19 + (x + y)^2 \\ (x + y) + (x + y)^2 = 18 - 38 + 2(x + y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = -19 + (x + y)^2 \\ (x + y)^2 - (x + y) - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = (x + y)^2 - 19 \\ \begin{cases} x + y = -4 \\ x + y = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 16 - 19 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 25 - 19 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -y - 4 \\ y(-y - 4) = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 - y \\ y(5 - y) = 6 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -y - 4 \\ y^2 + 4y - 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 - y \\ y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -y - 4 \\ \begin{cases} y = -2 - \sqrt{7} \\ y = -2 + \sqrt{7} \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 - y \\ \begin{cases} y = 2 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -2 + \sqrt{7} \\ y = -2 - \sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 - \sqrt{7} \\ y = -2 + \sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18 \\ xy + x^2 + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y) + (x + y)^2 = 18 + 2xy \\ (x + y)^2 = 12 + xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = (x + y)^2 - 12 \\ (x + y) + (x + y)^2 = 18 + 2(x + y)^2 - 24 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = (x + y)^2 - 12 \\ (x + y)^2 - (x + y) - 6 = 0 \end{cases} = \begin{cases} xy = (x + y)^2 - 12 \\ \begin{cases} x + y = -2 \\ x + y = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 4 - 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 9 - 12 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -y - 2 \\ y(-y - 2) = -8 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 - y \\ y(3 - y) = -3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 2 \\ y^2 + 2y - 8 = 0 \\ x = 3 - y \\ y^2 - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 2 \\ y = -4 \\ y = 2 \\ x = 3 - y \\ y = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \\ x = -4 \\ y = 2 \\ x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

$$8.34 \quad 1) \begin{cases} x^3 + y^3 = 72 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 72 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12(x+y) = 72 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ (6-y)^2 - y(6-y) + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ 3y^2 - 18y + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ y^2 - 6y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ y = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^3 - y^3 = 218 \\ x^2 + xy + y^2 = 109 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 218 \\ x^2 + xy + y^2 = 109 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 109(x-y) = 218 \\ x^2 + xy + y^2 = 109 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x^2 + xy + y^2 = 109 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ (y+2)^2 + y(y+2) + y^2 = 109 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y^2 + 2y - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y = -7 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -7 \\ x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^3 - y^3 = 133 \\ x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 7 \\ (y+7)^3 - y^3 = 133 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 7 \\ 21y^2 + 147y + 210 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 7 \\ y^2 + 7y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 7 \\ y = -5 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^3 + y^3 = -217 \\ x + y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 7 \\ (-y-7)^3 + y^3 = -217 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 7 \\ 21y^2 + 147y + 126 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 7 \\ y^2 + 7y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 7 \\ y = 6 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -6 \\ x = -6 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$8.35 \quad 1) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v \\ u+v = \frac{3}{2} \\ u^2 + v^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v \\ u = \frac{3}{2} - v \\ \left(\frac{3}{2} - v\right)^2 + v^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v \\ u = \frac{3}{2} - v \\ 8v^2 - 12v + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v \\ u = \frac{3}{2} - v \\ 2v^2 - 3v + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \equiv u & \frac{1}{y} \equiv v \\ u = \frac{3}{2} - v \\ v = \frac{1}{2} \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \equiv u & \frac{1}{y} \equiv v \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ 3(x+y) = xy \\ (x+y)^2 = 160 + 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ xy = 3(x+y) \\ (x+y)^2 = 160 + 6(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ xy = 3(x+y) \\ (x+y)^2 - 6(x+y) - 160 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ xy = 3(x+y) \\ \begin{cases} x+y = -10 \\ x+y = 16 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y = -10 \\ xy = -30 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = 16 \\ xy = 48 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -y-10 \\ y(-y-10) = -30 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 16-y \\ y(16-y) = 48 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -y-10 \\ y^2 + 10y - 30 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 16-y \\ y^2 - 16y + 48 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -y-10 \\ y = -5 - \sqrt{55} \\ y = -5 + \sqrt{55} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 16-y \\ y = 4 \\ y = 12 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -5 + \sqrt{55} \\ y = -5 - \sqrt{55} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5 - \sqrt{55} \\ y = -5 + \sqrt{55} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 12 \end{cases} \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} & y \neq 0 \\ \frac{81}{y^4} + y^4 = 82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} & y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (y^4)^2 - 82y^4 + 81 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x = \frac{3}{y} \\ \begin{cases} y^4 = 1 \\ y^4 = 81 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x = \frac{3}{y} \\ \begin{cases} y^2 = 1 \\ y^2 = 9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x = \frac{3}{y} \\ \begin{cases} y = -1 \\ y = 1 \\ y = -3 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ (5 - y)^3 + y^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 125 - 75y + 15y^2 - y^3 + y^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$8.36 \ 1) \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ x^2 + xy = a \\ y^2 + xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ (x+y)^2 = a+b \\ x^2 - y^2 = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b < 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a+b \geq 0 \\ \begin{cases} x+y = -\sqrt{a+b} \\ x+y = \sqrt{a+b} \end{cases} \\ (x+y)(x-y) = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b < 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a+b \geq 0 \\ \begin{cases} x+y = -\sqrt{a+b} \\ -\sqrt{a+b}(x-y) = a-b \\ x+y = \sqrt{a+b} \\ \sqrt{a+b}(x-y) = a-b \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b < 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a+b=0 \quad a-b \neq 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a+b=0 \quad a-b=0 \\ x+y=0 \\ a+b > 0 \\ \begin{cases} x+y = -\sqrt{a+b} \\ x-y = \frac{b-a}{\sqrt{a+b}} \\ x+y = \sqrt{a+b} \\ x-y = \frac{a-b}{\sqrt{a+b}} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b < 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a+b=0 \quad a-b \neq 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a+b=0 \\ x+y=0 \\ a+b > 0 \\ \begin{cases} x = -\frac{a}{\sqrt{a+b}} \\ y = -\frac{b}{\sqrt{a+b}} \\ x = \frac{a}{\sqrt{a+b}} \\ y = \frac{b}{\sqrt{a+b}} \end{cases} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ \frac{3a}{x-y} = \frac{x}{a} \\ \frac{10a}{x+y} = \frac{y}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ x, y \in \emptyset \\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x \neq \pm y \\ \begin{cases} x^2 - xy = 3a^2 \\ y^2 + xy = 10a^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ x, y \in \emptyset \\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad xy \neq 0 \quad x \neq \pm y \\ \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{y^2 + xy} = \frac{3}{10} \\ y^2 + xy = 10a^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ x, y \in \emptyset \\ a \neq 0, xy \neq 0 \quad x \neq \pm y \\ \begin{cases} 10x^2 - 13xy - 3y^2 = 0 \\ y^2 + xy = 10a^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ x, y \in \emptyset \\ a \neq 0 \quad xy \neq 0 \quad x \neq \pm y \\ 10\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 13\left(\frac{x}{y}\right) - 3 = 0 \\ y^2 + xy = 10a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ x, y \in \emptyset \\ a \neq 0 \quad xy \neq 0 \quad x \neq \pm y \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{1}{5} \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \\ y^2 + xy = 10a^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ x, y \in \emptyset \\ a \neq 0 \quad xy \neq 0 \quad x \neq \pm y \\ \begin{cases} y = -5x \\ 25x^2 - 5x^2 = 10a^2 \\ y = \frac{2}{3}x \\ \frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x^2 = 10a^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ x, y \in \emptyset \\ a \neq 0 \quad xy \neq 0 \quad x \neq \pm y \\ \begin{cases} y = -5x \\ \begin{cases} x = \frac{-a}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ y = \frac{2}{3}x \\ \begin{cases} x = -3a \\ x = 3a \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ x, y \in \emptyset \\ a \neq 0 \quad xy \neq 0 \quad x \neq \pm y \\ \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{a}{\sqrt{2}}; y = \frac{5a}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{a}{\sqrt{2}}; y = -\frac{5a}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3a; y = -2a \\ x = 3a; y = 2a \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ x, y \in \emptyset \\ a \neq 0 \\ \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{a}{\sqrt{2}}; y = \frac{5a}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{a}{\sqrt{2}}; y = -\frac{5a}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3a; y = -2a \\ x = 3a; y = 2a \end{cases} \end{cases}
 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ \frac{x-a}{x} + \frac{y-b}{b} = 1 \\ \frac{x-a}{a} + \frac{y-b}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ x, y \in \emptyset \\ ab \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \begin{cases} 1 - \frac{a}{x} + \frac{y}{b} - 1 = 1 \\ \frac{x}{a} - 1 + 1 - \frac{b}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ x, y \in \emptyset \\ ab \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \begin{cases} \frac{y}{b} = 1 + \frac{a}{x} \\ \frac{x}{a} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ x, y \in \emptyset \\ ab \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \begin{cases} \frac{y}{b} = 1 + \frac{a}{x} = 1 + \frac{1}{\frac{x}{a}} = \frac{\frac{x}{a} + 1}{\frac{x}{a}} \\ \frac{\frac{x}{a} - \frac{1}{\frac{x}{a} + 1}}{\frac{x}{a}} = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ x, y \in \emptyset \\ ab \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \begin{cases} \frac{y}{b} = \frac{\frac{x}{a} + 1}{\frac{x}{a}} \\ 2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{x}{a} - 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ x, y \in \emptyset \\ ab \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \begin{cases} \frac{y}{b} = \frac{\frac{x}{a} + 1}{\frac{x}{a}} \\ \begin{cases} \frac{x}{a} = -\frac{1}{2} \\ \frac{x}{a} = 1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ x, y \in \emptyset \\ ab \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \begin{cases} \begin{cases} \frac{x}{a} = -\frac{1}{2}; \frac{y}{b} = -1 \\ \frac{x}{a} = 1; \frac{y}{b} = 2 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ x, y \in \emptyset \\ ab \neq 0 \\ \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ y = -b \end{cases} \\ \begin{cases} x = a \\ y = 2b \end{cases} \end{cases}
 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} m \in R \\ \frac{x+m}{m} - \frac{y+m}{y} = 3 \\ \frac{y+m}{m} - \frac{x+m}{x} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ x, y \in \emptyset \\ m \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \frac{x}{m} + 1 - 1 - \frac{m}{y} = 3 \\ \frac{y}{m} + 1 - 1 - \frac{m}{x} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ x, y \in \emptyset \\ m \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \frac{x}{m} = \frac{3 \frac{y}{m} + 1}{\frac{y}{m}} \\ \frac{y}{m} - \frac{m}{3 \frac{y}{m} + 1} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ x, y \in \emptyset \\ m \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \frac{x}{m} = \frac{3 \frac{y}{m} + 1}{\frac{y}{m}} \\ \left(\frac{y}{m}\right)^2 = \frac{3 \frac{y}{m} + 1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ x, y \in \emptyset \\ m \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \frac{x}{m} = \frac{3 \frac{y}{m} + 1}{\frac{y}{m}} \\ 4 \left(\frac{y}{m}\right)^2 - 3 \frac{y}{m} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ x, y \in \emptyset \\ m \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \frac{x}{m} = \frac{3 \frac{y}{m} + 1}{\frac{y}{m}} \\ \frac{y}{m} = -\frac{1}{4} \\ \frac{y}{m} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ x, y \in \emptyset \\ m \neq 0 \quad xy \neq 0 \\ \frac{x}{m} = -1 \\ \frac{y}{m} = -\frac{1}{4} \\ \frac{x}{m} = 4 \\ \frac{y}{m} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ x, y \in \emptyset \\ m \neq 0 \\ \begin{cases} x = -m \\ y = -\frac{m}{4} \\ x = 4m \\ y = m \end{cases} \end{cases}$$

$$8.37 \quad 1) \begin{cases} a \in R \\ x+y=a \\ xy=-2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R \\ x=a-y \\ y(a-y)=-2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R \\ x=a-y \\ y^2-ay-2a^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R \\ x=a-y \\ \begin{cases} y=-a \\ y=2a \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R \\ \begin{cases} x=2a \\ y=-a \\ x=-a \\ y=2a \end{cases} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a \in R \\ x+y=2a \\ xy=-3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R \\ x=2a-y \\ y(2a-y)=-3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R \\ x=2a-y \\ y^2-2ay-3a^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R \\ x=2a-y \\ \begin{cases} y=-a \\ y=3a \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R \\ \begin{cases} x=3a \\ y=-a \\ x=-a \\ y=3a \end{cases} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} b \in R \\ x-y=b \\ xy=2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in R \\ x=b+y \\ y(b+y)=2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in R \\ x=b+y \\ y^2+by-2b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in R \\ x=b+y \\ \begin{cases} y=-2b \\ y=b \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in R \\ \begin{cases} x=-b \\ y=-2b \\ x=2b \\ y=b \end{cases} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} a, b \in R \\ x + y = a + 2b \\ xy = ab + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in R \\ x = (a + 2b) - y \\ y((a + 2b) - y) = ab + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in R \\ x = (a + 2b) - y \\ y^2 - (a + 2b)y + (ab + b^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in R \\ x = (a + 2b) - y \\ \begin{cases} y = b \\ y = a + b \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in R \\ \begin{cases} x = a + b \\ y = b \\ x = b \\ y = a + b \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in R \\ x^2 + y^2 = 5 \frac{m^2}{4} \\ xy = \frac{m^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ x = y = 0 \\ m \neq 0 \\ x = \frac{m^2}{2y} \\ \frac{m^4}{4y^2} + y^2 = \frac{5}{4} m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ x = y = 0 \\ m \neq 0 \\ x = \frac{m^2}{2y} \\ 4y^4 - 5m^2 y^2 + m^4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ x = y = 0 \\ m \neq 0 \\ x = \frac{m^2}{2y} \\ y^2 = \frac{m^2}{4} \\ y^2 = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ x = y = 0 \\ m \neq 0 \\ \begin{cases} x = -m \\ y = -\frac{m}{2} \\ x = m \\ y = \frac{m}{2} \\ x = -\frac{m}{2} \\ y = -m \\ x = \frac{m}{2} \\ y = m \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in R \\ \begin{cases} x = -m \\ y = -\frac{m}{2} \\ x = m \\ y = \frac{m}{2} \\ x = -\frac{m}{2} \\ y = -m \\ x = \frac{m}{2} \\ y = m \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R \\ x^2 + y^2 = \frac{13a^2}{36} \\ xy = \frac{a^2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x = y = 0 \\ a \neq 0 \\ x = \frac{a^2}{6y} \\ \frac{a^4}{36y^2} + y^2 = \frac{13a^2}{36} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x = y = 0 \\ a \neq 0 \\ x = \frac{a^2}{6y} \\ 36y^4 - 13a^2 y^2 + a^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x = y = 0 \\ a \neq 0 \\ x = \frac{a^2}{6y} \\ y^2 = \frac{a^2}{9} \\ y^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x = y = 0 \\ a \neq 0 \\ \begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ y = -\frac{a}{3} \\ x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{3} \\ x = -\frac{a}{3} \\ y = -\frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{3} \\ y = \frac{a}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R \\ \begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ y = -\frac{a}{3} \\ x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{3} \\ x = -\frac{a}{3} \\ y = -\frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{3} \\ y = \frac{a}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ x^2 + y^2 = \frac{10a^2}{9} \\ xy = \frac{a^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x = y = 0 \\ a \neq 0 \\ x = \frac{a^2}{3y} \\ \frac{a^4}{9y^2} + y^2 = \frac{10a^2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x = y = 0 \\ a \neq 0 \\ x = \frac{a^2}{3y} \\ 9y^4 - 10a^2y^2 + a^4 = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x = y = 0 \\ a \neq 0 \\ x = \frac{a^2}{3y} \\ y = -\frac{a}{3} \\ y = \frac{a}{3} \\ y = -a \\ y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} x = -a \\ y = -\frac{a}{3} \\ x = a \\ y = \frac{a}{3} \\ x = -\frac{a}{3} \\ y = -a \\ x = \frac{a}{3} \\ y = a \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ x^2 + y^2 = a^2 + 4b^2 \\ xy = 2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \quad xy = 2ab \\ x^2 + y^2 = a^2 + 4b^2 \\ 2xy = 4ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \quad xy = 2ab \\ (x+y)^2 = (a+2b)^2 \\ (x-y)^2 = (a-2b)^2 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \quad xy = 2ab \\ \begin{cases} x+y = a+2b \\ x+y = -a-2b \\ x-y = a-2b \\ x-y = -a+2b \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \quad xy = 2ab \\ \begin{cases} x+y = a+2b \\ x-y = a-2b \\ x+y = -a-2b \\ x-y = -a+2b \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \quad xy = 2ab \\ \begin{cases} x = a \\ y = 2b \\ x = 2b \\ y = a \\ x = -2b \\ y = -a \\ y = -a \\ y = -2b \end{cases} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} x = a \\ y = 2b \\ x = 2b \\ y = a \\ x = -2b \\ y = -a \\ y = -a \\ y = -2b \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.39 \quad 1) \quad & \begin{cases} a, m, n \in \mathbb{R}; \quad n \neq 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, m, n \in \mathbb{R}; \quad n \neq 0 \quad y \neq 0 \\ x = \frac{m}{n}y \\ \frac{m^2}{n^2}y^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, m, n \in \mathbb{R}; \quad n \neq 0 \quad y \neq 0 \\ x = \frac{m}{n}y \\ y^2 = \frac{a^2 n^2}{m^2 + n^2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, m, n \in \mathbb{R} \quad n \neq 0 \quad y \neq 0 \\ x = \frac{m}{n}y \\ \begin{cases} y = -\frac{an}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ y = \frac{an}{\sqrt{m^2 + n^2}} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \quad an \neq 0 \\ \begin{cases} x = -\frac{am}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ y = -\frac{an}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ x = \frac{am}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ y = \frac{an}{\sqrt{m^2 + n^2}} \end{cases} \end{cases} \\
 & \begin{cases} m \in \mathbb{R} \quad n \neq 0 \quad a = 0 \\ x, y \in \emptyset \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & b \neq 0 \\ x^2 = \frac{a}{y^2} \\ a - x = b - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & b \neq 0 & y \neq 0 \\ \frac{x}{y} = -\frac{a}{b} \\ \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \\ a - x = b - y \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & b \neq 0 & y \neq 0 \\ \begin{cases} x = -\frac{a}{b}y \\ a + \frac{a}{b}y = b - y \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{a}{b}y \\ a - \frac{a}{b}y = b - y \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & b \neq 0 & y \neq 0 \\ \begin{cases} x = -\frac{a}{b}y \\ \left(\frac{a+b}{b}\right)y = b - a \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{a}{b}y \\ \left(\frac{a-b}{b}\right)y = a - b \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} a = b \neq 0 \\ x = y \in \mathbb{R} \\ 0 \neq b \neq a & a + b = 0 \\ x = a \\ y = b \\ 0 \neq b \neq a & a + b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ x = \frac{a(a-b)}{a+b} \\ y = \frac{b(b-a)}{a+b} \end{cases} \\
 3) \quad & \begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} & c \neq 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c} \\ \frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} & c \neq 0 \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{c} - \frac{1}{y} \\ a \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{y} \right)^2 - b \left(\frac{1}{y} \right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} & c \neq 0 \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{c} - \frac{1}{y} \\ (a-b) \left(\frac{1}{y} \right)^2 - \frac{2a}{c} \left(\frac{1}{y} \right) + \frac{a}{c^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} c \neq 0 \\ \begin{cases} b = a = 0 \\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0, c\} \\ x = \frac{cy}{c-y} \end{cases} \\ \begin{cases} b = a \neq 0 \\ x = 2c \\ y = 2c \end{cases} \\ \begin{cases} b \neq a & ab < 0 \\ x, y \in \mathbb{Q} \end{cases} \\ \begin{cases} b \neq a & ba = 0 \\ x \in \mathbb{Q} \\ y \in \mathbb{Q} \end{cases} \\ \begin{cases} b \neq a & ab > 0 \\ \begin{cases} x = \frac{c(a-b)}{\sqrt{ab}-b} \\ y = \frac{c(a-b)}{a-\sqrt{ab}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{c(b-a)}{\sqrt{ab}+b} \\ y = \frac{c(a-b)}{\sqrt{ab}+a} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & ab \neq 0; & m, n \in \mathbb{R} & n \neq 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \\ \frac{bx+ay}{bx-ay} = \frac{m}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, m, n \in \mathbb{R} & abn \neq 0 \\ (bx)^2 + (ay)^2 = 2a^2b^2 \\ nbx + nay = mbx - may \\ bx - ay \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \begin{cases} a, b, m, n \in \mathbb{R} & abn \neq 0 \\ \begin{cases} m = \pm n \\ x, y \in \mathbb{Q} \end{cases} \\ \begin{cases} m \neq \pm n \\ x = \frac{n+m}{m-n}ay \\ \left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2 (ay)^2 + (ay)^2 = 2a^2b^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, m, n \in \mathbb{R} & abn \neq 0 \\ \begin{cases} m = \pm n \\ x, y \in \emptyset \end{cases} \\ m \neq \pm n \\ x = \frac{m+n}{m-n} ay \\ \begin{cases} y = -\frac{b(m-n)}{\sqrt{m^2+n^2}} \\ y = \frac{b(m-n)}{\sqrt{m^2+n^2}} \end{cases} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, m, n \in \mathbb{R} & abn \neq 0 \\ \begin{cases} m = \pm n \\ x, y \in \emptyset \end{cases} \\ m \neq \pm n \\ \begin{cases} x = -\frac{b(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}} \\ y = -\frac{b(m-n)}{\sqrt{m^2+n^2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{b(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}} \\ y = \frac{b(m-n)}{\sqrt{m^2+n^2}} \end{cases} \end{cases} \\
 & \text{8.40 1) } \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & b \neq 0 \\ \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{a}{b} \\ xy = (a^2 - b^2)^2 \\ x \geq 0 & y \geq 0 & x \neq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & b \neq 0 \\ b\sqrt{x} + b\sqrt{y} = a\sqrt{x} - a\sqrt{y} \\ xy = (a^2 - b^2)^2 \\ x \geq 0 & y \geq 0 & x \neq y \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & b \neq 0 \\ (a+b)\sqrt{y} = (a-b)\sqrt{x} \\ xy = (a^2 - b^2)^2 \\ x \geq 0 & y \geq 0 & x \neq y \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & b \neq 0 \\ \begin{cases} a = \pm b \\ x, y \in \emptyset \end{cases} \\ a \neq \pm b \\ \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{y} \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = |a^2 - b^2| \\ x \geq 0, y \geq 0, x \neq y \end{cases} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & b \neq 0 \\ \begin{cases} a = \pm b \\ x, y \in \emptyset \end{cases} \\ a \neq \pm b & \frac{a+b}{a-b} > 0 \\ \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{y} \\ \frac{a+b}{a-b} (\sqrt{y})^2 = a^2 - b^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq \pm b & \frac{a+b}{a-b} < 0 \\ x, y \in \emptyset \end{cases} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & b \neq 0 \\ \begin{cases} a = \pm b \\ y \in \emptyset \end{cases} \\ a \neq \pm b & |a| > |b| \\ \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{y} \\ y = (a-b)^2 \\ a \neq \pm b & |a| < |b| \\ x, y \in \emptyset \end{cases} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & b \neq 0 \\ \begin{cases} |a| \leq |b| \\ x, y \in \emptyset \end{cases} \\ |a| > |b| \\ \begin{cases} x = (a+b)^2 \\ y = (a-b)^2 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2) \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ x(1 + \frac{x}{y}) = a \\ y(1 + \frac{y}{x}) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & xy \neq 0 \\ \frac{x}{y}(x+y) = a \\ \frac{y}{x}(x+y) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & xy \neq 0 \\ (x+y)^2 = ab \\ \frac{x}{y}(x+y) = a \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & ab < 0 \\ x, y \in \emptyset \end{cases} \vee \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & ab = 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & y = -x \end{cases} \vee \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & ab > 0 \\ \begin{cases} x+y = -\sqrt{ab} \\ x+y = \sqrt{ab} \end{cases} \\ \frac{x}{y} = \frac{a}{x+y} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & ab < 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a, b \in \mathbb{R} & ab = 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & y = -x \\ a, b \in \mathbb{R} & ab > 0 \\ \begin{cases} x + y = -\sqrt{ab} \\ \frac{x}{y} = \frac{-a}{\sqrt{ab}} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = \sqrt{ab} \\ \frac{x}{y} = \frac{a}{\sqrt{ab}} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & ab < 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a, b \in \mathbb{R} & ab = 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & y = -x \\ a, b \in \mathbb{R} & ab > 0 \\ \begin{cases} x = -\frac{a}{\sqrt{ab}} y \\ -\frac{a}{\sqrt{ab}} y + y = -\sqrt{ab} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{ab}} y \\ \frac{a}{\sqrt{ab}} y + y = \sqrt{ab} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & ab < 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a, b \in \mathbb{R} & ab = 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & y = -x \\ a, b \in \mathbb{R} & ab > 0 & a \neq b \\ \begin{cases} x = -\frac{a\sqrt{ab}}{a - \sqrt{ab}} \\ y = \frac{ab}{a - \sqrt{ab}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{a\sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}} \\ y = \frac{ab}{a + \sqrt{ab}} \end{cases} \\ a, b \in \mathbb{R} & ab > 0 & a = b \\ \begin{cases} x = \frac{a\sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}} \\ y = \frac{ab}{a + \sqrt{ab}} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \begin{cases} a \in \mathbb{R} & a \neq 0 \\ xy - \frac{x}{y} = a \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & xy \neq 0 \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{1}{a} - a \\ xy = a + \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & xy \neq 0 \\ \frac{x}{y} - \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{1}{a} - a \\ xy = a + \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & xy \neq 0 \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{1}{a} - a\right)\frac{x}{y} - 1 = 0 \\ xy = a + \frac{x}{y} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & xy \neq 0 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{a} \\ \frac{x}{y} = -a \\ xy = a + \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & xy \neq 0 \\ \begin{cases} x = \frac{y}{a} \\ xy = a + \frac{1}{a} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -ay \\ xy = a - a = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \begin{cases} x = \frac{y}{a} \\ \frac{y^2}{a} = \frac{a^2 + 1}{a} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \begin{cases} x = \frac{y}{a} \\ y = -\sqrt{a^2 + 1} \\ y = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \\ y = -\sqrt{a^2 + 1} \\ x = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \\ y = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ \frac{x^3}{y} + xy = a^2 \\ \frac{y^3}{x} + xy = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & xy \neq 0 \\ \frac{x}{y}(x^2 + y^2) = a^2 \\ \frac{y}{x}(x^2 + y^2) = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & xy \neq 0 \\ (x^2 + y^2) = (ab)^2 \\ \frac{x}{y}(x^2 + y^2) = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & xy \neq 0 \\ x^2 + y^2 = |ab| \\ \frac{x}{y}|ab| = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & ab = 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a, b \in \mathbb{R} & ab \neq 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = |ab| \\ \frac{x}{y} = \frac{a^2}{x^2 + y^2} = \frac{|a|^2}{|ab|} = \frac{|a|}{|b|} \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & ab = 0 \\ x, y \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & ab = 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a, b \in \mathbb{R} & ab \neq 0 \\ x = \frac{|a|}{|b|}y \\ y = -\frac{b\sqrt{|ab|}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ y = \frac{b\sqrt{|ab|}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} & ab = 0 \\ x, y \in \emptyset \\ a, b \in \mathbb{R} & ab \neq 0 \\ x = \frac{-b|a|\sqrt{|ab|}}{|b|\sqrt{a^2 + b^2}} \\ y = -\frac{b\sqrt{|ab|}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ x = \frac{b|a|\sqrt{|ab|}}{|b|\sqrt{a^2 + b^2}} \\ y = \frac{b\sqrt{|ab|}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$8.41 \quad 1) \begin{cases} \sqrt{x+y-1}=1 \\ \sqrt{x-y+2}=2y-2 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=1 \\ x-y+2=(2y-2)^2 \\ x+y-1>0 \\ x-y+2\geq 0 \\ 2y-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ 2-y-y+2=4y^2-8y+4 \\ y\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ 4y^2-6y=0 \\ y\geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y=0 \\ y=1,5 \\ y\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-1,5 \\ y=1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,5 \\ y=1,5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x+3y+1}=2 \\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+1=4 \\ 2x+y+2=(7y-6)^2 \\ x+3y+1>0 \\ 2x-y+2\geq 0 \\ 7y-6\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3y \\ 6-6y-y+2=49y^2-84y+36 \\ y\geq \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3y \\ 49y^2-77y+28=0 \\ y\geq \frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3y \\ y=\frac{28}{49} < \frac{6}{7} \\ y=1 \\ y\geq \frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{x-y+5}=3 \\ \sqrt{x+y-5}=-2x+11 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+5=9 \\ x+y-5=(-2x+11)^2 \\ x-y+5>0 \\ x+y-5\geq 0 \\ -2x+11\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+(-2x+11)^2=2x \\ y=x-4 \\ x\leq 5,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 5,5 \\ 4x^2-46x+130=0 \\ y=x-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5,5 \\ x = 7,5 \\ x = 5 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sqrt{y-x+1}=1 \\ \sqrt{x-2y+3}=3y-2x-1 \\ x, y \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x+1=1 \\ x-2y+3=(3y-2x-1)^2 \\ y-x+1>0 \\ x-2y+3 \geq 0 \\ 3y-2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y-2y+3=(3y-2y-1)^2 \\ 3y-2y-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 3-y=(y-1)^2 \\ y-1 \geq 0 \\ 3-y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 3-y=y^2-2y+1 \\ y \in [1,3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y^2-y-2=0 \\ y \in [1,3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=-1 \\ y=2 \\ y \in [1,3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$8.42 \quad 1) \begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2 \\ x^5\sqrt{x^2-4y^2}=0 \\ x, y \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-4y^2}=0 \\ x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2 \\ x^2-4y^2 \geq 0 \\ x^5=0 \\ x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ x-y=2 \\ |x| \geq 2|y| \\ x=0 \\ 0-y+\sqrt{0^2-4y^2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ (y+2)^2-4y^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ 3y^2-4y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ y=-\frac{2}{3} \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \\ x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y-\sqrt{4y^2-x^2}=4 \\ y^9\sqrt{4y^2-x^2}=0 \\ x, y \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{4y^2-x^2}=4 \\ y^9=0 \\ \sqrt{4y^2-x^2}=0 \\ 4y^2-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2-x^2 \geq 0 \\ y^9=0 \\ x+y-\sqrt{4y^2-x^2}=4 \\ \sqrt{4y^2-x^2}=0 \\ x+y-\sqrt{4y^2-x^2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|y| \geq |x| \\ y=0 \\ x-\sqrt{-x^2}=4 \\ 4y^2-x^2=0 \\ x+y=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2-x^2=0 \\ x=4-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ 4y^2-(4-y)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ 3y^2+8y-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ y=-4 \\ y=\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-4 \\ x=\frac{8}{3} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x-y+\sqrt{4x^2-y^2}=1 \\ x^7\sqrt{4x^2-y^2}=0 \\ x, y \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+\sqrt{4x^2-y^2}=1 \\ x^7=0 \\ \sqrt{4x^2-y^2}=0 \\ 4x^2-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-y^2 \geq 0 \\ x^7=0 \\ x-y+\sqrt{4x^2-y^2}=1 \\ \sqrt{4x^2-y^2}=0 \\ x-y+\sqrt{4x^2-y^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x| \geq |y| \\ x=0 \\ y+\sqrt{-y^2}=1 \\ 4x^2-y^2=0 \\ x=y+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 4(y+1)^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 3y^2 + 8y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = -2 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y - \sqrt{y^2 - 4x^2} = 5 \\ y^3 \sqrt{y^2 - 4x^2} = 0 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \sqrt{y^2 - 4x^2} = 5 \\ y^3 = 0 \\ \sqrt{y^2 - 4x^2} = 0 \\ y^2 - 4x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2 - 4x^2} \geq 0 \\ y^3 = 0 \\ x + y - \sqrt{y^2 - 4x^2} = 5 \\ \sqrt{y^2 - 4x^2} = 0 \\ x + y - \sqrt{y^2 - 4x^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| \geq 2|x| \\ y = 0 \\ x - \sqrt{-4x^2} = 5 \\ y^2 - 4x^2 = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y^2 - 4(5 - y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 3y^2 - 40y + 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y = \frac{10}{3} \\ y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{10}{3} \\ x = -5 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$8.43 \quad 1) \begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1 \\ 5x^6 - 8x^3 \sqrt{y} + 2y = 2 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \sqrt{y} + 1 \\ 5(\sqrt{y} + 1)^2 - 8(\sqrt{y} + 1)\sqrt{y} + 2y = 2 \\ x \geq 1 \quad y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\sqrt{y} + 1} \\ (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{y} - 3 = 0 \\ x \geq 1 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\sqrt{y} + 1} \\ \sqrt{y} = -1 (< 0) \\ \sqrt{y} = 3 \\ x \geq 1 \quad y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \\ y = 9 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} = x + 1 \\ x - y = 1 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4xy - 3y^2 = (x + 1)^2 \\ x - y = 1 \\ x^2 + 4xy - 3y^2 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x(x - 1) - 3(x - 1)^2 = (x + 1)^2 \\ y = x - 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 = 4 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = -2 \\ x = 2 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{x} - y^5 = 2 \\ 2y^{10} - 3y^5 \sqrt{x} + 3x = 20 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^5 = \sqrt{x} - 2 \\ 2(\sqrt{x} - 2)^2 - 3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) + 3x = 20 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^5 = \sqrt{x} - 2 \\ (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 6 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} = -2 < 0 \\ \sqrt{x} = 3 \\ y = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2(y-1) = \sqrt{10x^2 - xy - 2y^2} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4(y-1)^2 = 10x^2 - xy - 2y^2 \\ 2(y-1) \geq 0 \\ 10x^2 - xy - 2y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{y}{2} \\ 4(y-1)^2 = 10(1 - \frac{y}{2})^2 - y(1 - \frac{y}{2}) - 2y^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{y}{2} \\ y^2 + y - 2 = 0 \\ y \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{y}{2} \\ y = -2 \\ y = 1 \\ y \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

$$8.44 \text{ D) } \begin{cases} x^2 y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1 \\ y^3 = -2(x-1)^2 - 1 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [-1, 1] \\ y \in]-\infty, -1] \\ y^3 = -2(x-1)^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^3 = -2(x-1)^2 - 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0 \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - \frac{1}{2}x)^2 + 1 - \frac{1}{4}x^2 = 0 \\ x^2 + 2x = -(y+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 \leq 0 \\ x^2 + 2x \leq 0 \\ (y+1)^2 = -(x^2 + 2x) \\ \left(y - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{4 - x^2}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\\ x \in [-2, 0] \\ (y+1)^2 = -(x^2 + 2x) \\ \left(y - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{4 - x^2}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 + 4x^2 y^2 + 4y = 0 \\ 4x^3 - 4y^2 - 4y - 5 = 0 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -\frac{4y}{4y^2 + 1} (\leq 1) \\ 4x^3 - 4 = (2y+1)^2 \\ 4x^3 - 4 \geq 0 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 & x \leq 1 \\ x^2 = -\frac{4y}{4y^2 + 1} \\ 4x^3 - 4 = (2y+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}y^2\right)^2 + 4 - \frac{y^4}{4} = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| \leq 1 & |y-1| \leq 1 \\ 4 - \frac{1}{4}y^4 \leq 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}y^2\right)^2 + 4 - \frac{y^4}{4} = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 & 0 \leq y \leq 2 \\ y \leq -2 \\ y \geq 2 \\ \left(x - \frac{1}{2}y^2\right)^2 + 4 - \frac{y^4}{4} = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$